

Électrostatique et magnétostatique

Michel SAINT-JEAN,
Janine BRUNEAUX et Jean MATRICON



8, rue Férou 75278 Paris cedex 06
www.editions-belin.com

Dans la collection Belin Sup Sciences

J. Bruneaux, M. Saint-Jean et J. Matricon
Électrostatique et magnétostatique, résumé de cours et exercices

A. Maurel
Optique géométrique, cours

A. Maurel, J.-M. Malbec
Optique géométrique, résumé de cours et exercices

Dans la collection Belin Sup Histoire des Sciences

A. Barberousse
La mécanique statistique de Clausius à Gibbs

M. Blay
La science du mouvement de Galilée à Lagrange

Photo de couverture : © Digital Vision
Illustrations et composition : Jean-Marc Dignac
Mise en pages : Publilog

 ISSN 1158-3762 ISBN 2-7011-3348-3

Sommaire

1. Un peu d'histoire... 7

2. Électrostatique dans le vide : loi de Coulomb 11
Charges électriques et distributions de charges 12
Forces entre charges électriques statiques 15
Le champ électrostatique dans le vide 19
Le potentiel électrostatique dans le vide 21
Lignes de champ et surfaces équipotentielles 26
Applications de ces définitions à quelques exemples 28

3. Propriétés du champ électrostatique 33
Propriétés associées au caractère radial du champ électrostatique 34
Propriétés associées à la dépendance en $1/r^2$ de l'intensité du champ électrostatique 35
Propriétés de symétrie du champ électrostatique 39
Exemple d'utilisation des propriétés du champ électrostatique 42
Calcul du champ électrostatique créé par des distributions de charges de symétrie élevée 44
Méthode générale 49

4. Équations de Laplace et de Poisson 51
Équations de Poisson et de Laplace 52
Exemple d'utilisation de l'équation locale 54
Complément : Théorème de la valeur moyenne sur une sphère 60

5. Dipôles et multipôles électriques 63
Ensemble de deux charges électriques de même grandeur et de signes opposés 64
Notion de développement multipolaire 68
Exemple de distributions multipolaires 71

6. Conducteurs à l'équilibre 75
Définition d'un conducteur 76
Conducteur à l'équilibre 77
Capacité d'un conducteur unique isolé 79
Phénomènes d'influence 80
Ensemble de conducteurs à l'équilibre 83
Condensateurs et groupement de condensateurs 84
Champ et potentiel à l'extérieur d'un système de conducteurs à l'équilibre 89

7. Électrostatique dans les milieux isolants 95
Polarisation de la matière 96

Champ électrique, potentiel et charges de polarisation dans les isolants 101
Systèmes présentant une polarisation permanente 104
Systèmes présentant une polarisation induite : les diélectriques 109
Le vecteur déplacement $\vec{D}$ 112
Capacité et diélectrique 115
Compléments : notion de champ local 117

8. Énergie électrostatique 121
Énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles 122
Énergie électrostatique associée à une distribution continue de charges 123
Énergie associée à un ensemble de conducteurs à l'équilibre 126
Forces et moments de forces 129

9. Le champ magnétostatique 137
Force magnétique entre fils rectilignes infinis 138
Notion de champ magnétique 140
Propriétés locales du champ magnétique 146
Exemples de calcul du champ magnétique créé par différentes distributions de courants 151

10. Le potentiel vecteur 159
Potentiel vecteur et champ magnétique 160
Potentiel vecteur associé à des courants continus 162
Exemples de potentiels vecteurs 165

11. L'induction magnétique 173
Mise en évidence expérimentale de l'induction 174
Force électromagnétique induite et courant induit 176
Interprétations de la loi de Faraday 178
Définition et propriétés locales du champ électrique 181
Notion d'inductance 182
Exemples d'applications de phénomènes d'induction 187

12. Magnétisme dans la matière 191
Aimantation de la matière 192
Champ magnétique et courants d'aimantation dans la matière 199
Le champ auxiliaire $\vec{H}$ 201
Complément : ferromagnétisme 204

13. L'énergie magnétique 213
Énergie magnétique emmagasinée dans une boucle de courant 214
Expression de l'énergie en fonction des champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ 218
Expression de l'énergie en fonction des inductances 220
Forces et moments de forces 222

14. Applications du magnétisme 229
Étude de quelques circuits magnétiques 230
Les transformateurs 233
Les moteurs électriques 236

A. Éléments d'analyse vectorielle 245
Les systèmes de coordonnées 245
Orientation de l'espace 248
Produit de vecteurs 249
Vecteur gradient 250
Flux et divergence d'un champ de vecteurs 252
Circulation et rotationnel d'un champ de vecteurs 257
Le laplacien 264
Théorème de Green-Ostrogradsky 264
Théorème de Stockes 266
Quelques relations à connaître en algèbre vectorielle 268
Quelques formules utiles 268
Définition de l'angle solide 270

Réponses aux exercices 271

Chapitre 1

Un peu d'histoire...

L'ensemble formé par l'électrostatique, le magnétisme et l'électromagnétisme tels qu'ils sont enseignés aujourd'hui est parfaitement cohérent, et ressemble à une construction entièrement logique : quelques expériences fondamentales permettent d'induire des lois générales d'où découlent, par des raisonnements mathématiques, d'autres lois merveilleusement vérifiées par l'expérience. On se donne même parfois le luxe de suivre un cheminement pseudo-historique pour dérouler cette belle histoire.

Or, la vraie histoire ne ressemble nullement à celle qui est suggérée. La voie réellement suivie par une idée, depuis la première ébauche, souvent perdue ou ignorée, et la forme parfaite sous laquelle on la présente maintenant est en général tortueuse, pleine de rebroussements, d'erreurs, de fausses pistes, de longues périodes de stagnation ou d'oubli, mais aussi d'avancées fulgurantes. Les héros qui ont survécu, ceux dont un effet, une unité ou un appareil portent le nom, sont peu nombreux en comparaison de tous les inconnus sans lesquels l'édifice n'aurait ni fondations ni charpentes.

L'histoire de l'électricité et du magnétisme commence certainement chez les Grecs, qui observent le phénomène d'électrisation par frottement et les propriétés magnétiques (attraction/répulsion) de certains minéraux et surtout éprouvent le besoin de consigner par écrit leurs observations. Certes, plusieurs propriétés du magnétisme sont utilisées, en particulier la boussole, probablement inventée par les Chinois au XIe siècle, mais aucune recherche « scientifique » sur ces questions n'apparaît avant le XVIIe siècle.

Durant la période qui va de la fin du XVIe au début du XVIIIe siècle, jalonnée par les noms prestigieux de Galilée, Huygens et Newton, pour ne citer que ceux-là, un changement considérable se produit dans l'art d'observer la nature. Jusqu'alors, on se contentait de vérifier, par une observation rarement quantitative, la conformité de la nature à des principes d'origine philosophique ou religieuse considérés comme vrais et immuables. Il est habituel de faire crédit à Galilée d'avoir renversé l'ordre de préséance, en affirmant qu'il fallait d'abord observer et décrire la nature avant d'énoncer des lois. Le résultat spectaculaire de ce choix, joint certes aux talents particuliers de Galilée fut la naissance de la mécanique, dont Newton sut faire usage en établissant les lois de la dynamique et celle de la gravitation.

Pour ce qui concerne les phénomènes électriques et magnétiques, la situation est fondamentalement différente de celle de la mécanique, en ce sens que les manifestations de ces phénomènes sont relativement rares et que les moyens d'expérimentation n'existent pas spontanément : la nature offre beaucoup plus d'occasions de découvrir directement les effets de la gravitation que ceux des forces électriques, et l'expérimentation dans ce domaine ne pouvait relever que d'une démarche volontariste, ce qui, lorsqu'on n'a aucune idée sur ce que l'on veut chercher, n'est pas une attitude facile... C'est cependant ce que

firent quelques pionniers : William Gilbert (1540-1603) mit en évidence la différence entre magnétisme et électricité et montra que l'orientation de la boussole pouvait s'expliquer en considérant le globe terrestre comme un gros aimant ; Otto von Guericke (1602-1686) construisit la première machine électrostatique, permettant de faire une véritable expérimentation ; Stephen Gray (1666-1736) établit la différence entre conducteurs et isolants ; Charles Dufay (1698-1739), accompagné de l'abbé Nollet (1700-1770) établit l'existence de deux sortes d'électricité, qu'il nomma non pas positive et négative, mais vitreuse et résineuse en référence aux objets utilisés pour les « extraire » par frottement ; Petrus von Musschenbroek (1692-1761) découvrit la condensation de l'électricité (bouteille de Leyde) ; Benjamin Franklin (1706-1790) montra que les éclairs ne sont autres que de puissantes étincelles électriques, ce qui prouvait que l'électricité participait aux phénomènes naturels et n'était pas qu'une curiosité de salon ; on doit également à Franklin l'idée que la neutralité électrique de la matière résulte d'une compensation parfaite entre charges positives et négatives ; John Priestley (1733-1804), imprégné du modèle newtonien de la gravitation, découvrit qu'à l'intérieur d'une boîte métallique ne s'exerce aucune force électrique, et en déduisit que les interactions entre charges devaient obéir à une loi en inverse du carré de la distance, loi qu'il n'alla pas jusqu'à publier.

Un autre anglais, Henry Cavendish (1731-1810) fit nombre de découvertes importantes dans le domaine de l'électricité, en particulier il trouva lui aussi, la loi en carré inverse de la distance, mais il ne publia pratiquement aucun de ses résultats. Ce ne fut que cinquante ans plus tard qu'on déchiffra ses archives et qu'on prit connaissance de tout ce qu'il avait découvert. C'est finalement à Charles Augustin Coulomb (1736-1806) que la postérité a attribué cette loi fondatrice, qu'il a d'ailleurs énoncée à la suite d'expériences remarquables de mesure de la force entre deux charges, et non à la suite de déductions mathématiques comme cela avait été le cas pour Priestley et Cavendish.

L'énoncé de toutes ces étapes montre bien quel chemin il fallait parcourir pour arriver à énoncer enfin une loi simple, que sa ressemblance formelle avec la loi de la gravitation rendait parfaitement « convenable » et acceptable. De ce fait, il était facile aux brillants mathématiciens dont les talents s'exerçaient autour des années 1800, les Lagrange, Laplace, Poisson, Gauss, Green, de construire un outil mathématique spécifique à l'électrostatique, dont les qualités et la solidité sont telles qu'il n'a pas de rival et que c'est lui qu'on va rencontrer dans cet ouvrage.

Mais les contemporains de Coulomb découvraient un autre phénomène dont la relation avec l'électricité n'était pas du tout évidente : les courants galvaniques, ainsi nommés en hommage au biologiste bolonais Luigi Galvani (1737-1798) qui découvrit fortuitement que la mise en marche d'une machine électrostatique induisait des contractions sur des muscles de grenouille qu'il venait de disséquer au voisinage de la machine. Cette expérience attira l'attention du physicien Alessandro Volta (1745-1827) qui analysa le phénomène, et, ayant observé le rôle des pièces métalliques servant de support aux muscles dans le déclenchement des réactions, inventa la « pile électrique », par empilement de disques de cuivre et de zinc séparés par des rondelles de tissu imprégné de vinaigre. Cet engin extraordinaire permettait de faire circuler des courants intenses, ce que ne permettaient pas jusqu'alors les machines électrostatiques. Il faut savoir gré à Volta d'avoir clairement montré l'analogie entre ce qui sortait de sa pile et ce que produisaient les machines électrostatiques.

Il régnait au début du XIXe siècle un courant philosophique qui traversait toutes les disciplines scientifiques, et qui postulait l'existence d'une grande unité des lois de la nature, affirmant que tous les phénomènes étaient liés entre eux ; il suffisait de découvrir le lien pour que l'unité se manifestât. Il est certain que le rapprochement entre la loi de Coulomb et celle de la gravitation, ainsi que la relation établie par Galvani entre phénomènes électriques et effets biologiques confortaient les adeptes de ces idées. C'est dans le cadre de ce courant de pensée que se situe l'événement qui, en 1820, va donner une dimension nouvelle à la science de l'électricité : la découverte par Christian Oerstedt (1777-1851) de propriétés magnétiques liées au courant électrique, immédiatement suivie d'une théorie complète de cet effet et de sa formulation mathématique adéquate par André-Marie Ampère (1775-1836). Là encore, l'édifice est si parfait, qu'à quelques notations près, c'est lui qui est encore enseigné.

Nous pouvons analyser la situation en 1820 en considérant que d'un côté, il existe une théorie du potentiel, cohérente et achevée, qui rend bien compte de tout ce qu'on sait sur les interactions entre charges électriques immobiles, de l'autre une théorie électromagnétique qui donne du magnétisme et de sa relation aux courants électriques stationnaires, une description phénoménologique tout à fait opérationnelle. Il nous est facile aujourd'hui de dire qu'il manquait à l'édifice, d'une part une connexion entre le monde des charges immobiles et celui des courants, d'autre part, la réciproque de l'origine électrique des champs magnétiques, à savoir la possibilité d'engendrer des courants à partir des champs magnétiques.

C'est Georg-Simon Ohm (1787-1854) qui rendit claire la notion de résistance électrique et qui, par la loi qui porte son nom, établit le pont entre potentiel et courant. Le pas décisif qui fit sortir l'électricité du laboratoire pour envahir le monde fut franchi par Michael Faraday (1791-1867), génial expérimentateur, qui découvrit en 1831 le phénomène d'induction, et construisit dans la foulée une dynamo, un moteur et un transformateur. On sait à quelle vitesse ces appareils devinrent les outils de la révolution industrielle. La contribution de Faraday à l'ensemble de l'électromagnétisme est immense et concerne de nombreux aspects, souvent suggérés par la recherche d'une unité sous-jacente entre ces différentes branches de la « philosophie naturelle » qu'étaient l'électricité, le magnétisme, la lumière, la matière etc. Dans chaque domaine, sa contribution, tantôt définitive, tantôt seulement prémonitoire, a toujours été fondamentale.

Au tournant du demi-siècle, après 1850, on peut considérer que le modèle newtonien, nullement remis en cause, n'est cependant plus l'unique référence. Les progrès de la thermodynamique, une connaissance de plus en plus fine des propriétés de la matière et de ce que nous appelons aujourd'hui « propriétés de transport », transport de la chaleur, de l'électricité, de la quantité de mouvement, tout contribue à donner du monde physique une image plus nuancée, où d'autres interactions que des forces s'exerçant à distance entrent en jeu. Les temps sont mûrs pour qu'une nouvelle révolution, perçue par les contemporains comme comparable à celle de Newton, se produise. C'est James Clerk Maxwell (1831-1879) qui fut ce second Newton en proposant la théorie unitaire de l'électromagnétisme qui réunit dans un même formalisme les résultats accumulés depuis un siècle par Coulomb, Ampère, Faraday, Gauss, Weber et bien d'autres.

Les « équations de Maxwell » constituent un ensemble d'une parfaite élégance mathématique dont le pouvoir prédictif s'est avéré prodigieux : le fait que la lumière soit de

nature électromagnétique, soupçonné déjà par Faraday, fut clairement compris par Maxwell, mais c'est la découverte des ondes hertziennes par Heinrich Hertz (1857-1874) qui apporta une éclatante confirmation de l'existence de ces ondes électromagnétiques prédites par Maxwell.

L'édifice scientifique qui s'était construit au cours des deux siècles passés, et dont l'œuvre de Maxwell semblait l'achèvement, impressionnait beaucoup ceux qui, à la fin du XIXe siècle, le contemplaient. Le succès paraissait tel, dans tous les domaines et pas seulement en physique, que la croyance dans la toute puissance de la science pour assurer un avenir radieux aux hommes inspirait des courants de pensée et des doctrines politiques qui ont largement débordé sur le XXe siècle. Pourtant, certains esprits clairvoyants avaient bien détecté quelques failles dans l'édifice. En ce qui concerne l'électromagnétisme, deux points au moins étaient obscurs : d'une part, l'existence de l'éther, ce milieu aux invraisemblables propriétés, qui semblait indispensable à la propagation des ondes électromagnétiques comme l'air l'est à la propagation du son, d'autre part la constatation évidente que les équations de Maxwell n'obéissaient pas au principe d'invariance galiléenne, clé de voûte de la mécanique newtonienne,

Ces failles n'échappèrent pas au physicien hollandais Hendrik Antoon Lorentz (1853-1927), qui analysa très finement les hypothèses sous-jacentes dans l'écriture des équations de Maxwell, concernant la relation des champs électrique et magnétique avec le milieu de propagation, que ce soit la matière ou l'éther.

Malgré la pertinence de cette analyse, Lorentz ne put venir à bout des contradictions, en particulier de celles qu'amenait la célèbre expérience des physiciens américains Albert Abraham Michelson (1852-1931) et Edward-Williams Morley (1838-1923), qui rendait encore plus invraisemblable le comportement de l'éther. Il fallut attendre les travaux du plus illustre de tous les savants, Albert Einstein (1879-1955) pour que cette question soit définitivement clarifiée.

Chapitre 2

Électrostatique dans le vide : loi de Coulomb

Les concepts fondamentaux permettant de décrire les phénomènes électrostatiques dans le vide sont introduits dans ce chapitre. Suivant en cela la progression historique des développements de l'électrostatique, nous présenterons tout d'abord la notion de force électrostatique, puis successivement celles de champ et de potentiel électrostatiques. Soulignons que ce choix est arbitraire, la force électrostatique n'étant que l'une des façons de formuler la loi fondamentale permettant de décrire les propriétés électrostatiques de la matière et les phénomènes physiques associés.

2.1 Charges électriques et distributions de charges

1 Charges électriques et corps électriquement chargés
2 Distributions de charges électriques statiques

2.2 Forces entre charges électriques statiques

1 Force entre deux charges ponctuelles - Loi de Coulomb
2 Principe de superposition

2.3 Le champ électrostatique dans le vide

1 Définition du champ électrostatique
2 Expressions du champ électrostatique

2.4 Le potentiel électrostatique dans le vide

1 Existence d'un potentiel électrostatique
2 Définition du potentiel électrostatique
3 Le champ électrostatique « dérive » du potentiel électrostatique

2.5 Lignes de champ et surfaces équipotentielles

2.6 Applications de ces définitions à quelques exemples

1 Exemple d'une distribution discrète
2 Exemple d'une distribution continue

Mots-clés

- **Charges**
- **Forces**
- **Forces de Coulomb**
- **Champ électrostatique**
- **Potentiel électrostatique**

2.1. Charges électriques et distributions de charges

1 Charges électriques et corps électriquement chargés

Charges électriques élémentaires

À l'échelle atomique, les charges électriques sont le proton, chargé positivement, et l'électron, charge négativement. Dans le système M.K.S.A., leur charge et leur masse sont données respectivement par :

$$p = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb}, \qquad m_\text{p} = 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$
$$e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{ coulomb}, \qquad m_\text{e} = 0,9 \cdot 10^{-30} \text{ kg}$$

Il s'agit là de charges élémentaires permanentes dans le temps et dans l'espace dont les valeurs sont considérées comme des constantes universelles. Notons que l'unité associée aux charges électriques, le coulomb correspond à une charge extrêmement grande. Pour fixer les idées, la charge électrique transférée dans un éclair d'orage est de l'ordre de 20 à 30 C.

Un peu d'histoire

Électron

À la Renaissance, les savants introduisirent le mot latin *electrum* pour décrire les phénomènes observés depuis l'antiquité lorsque l'on frotte de l'ambre, matière appelée *êlektron* en grec.

Corps électriquement chargés

Tout processus d'électrification doit être compris comme le transfert d'un certain nombre de ces charges élémentaires. Un atome de nombre atomique Z est formé de Z électrons « gravitant » autour d'un noyau contenant Z protons et N neutrons de charge nulle. L'ensemble est électriquement neutre. Lorsqu'on arrache un ou plusieurs électrons à cet atome neutre, il devient un ion chargé positivement ; à l'inverse, si on ajoute un ou plusieurs électrons à cet atome, on crée un ion chargé négativement.

Plus généralement, à l'échelle macroscopique, un corps déficitaire en électrons sera considéré comme chargé positivement tandis qu'un corps excédentaire en électrons sera considéré comme chargé négativement. Notons que cette charge macroscopique ne pourra être qu'un multiple entier de la charge électronique e. (Dans la plupart des cas, ce sont les électrons qui sont échangés, les protons étant trop solidement liés au noyau.)

Conservation de la charge électrique

Les charges électriques élémentaires étant permanentes, si un corps chargé est isolé, c'est-à-dire s'il ne peut pas échanger de charges avec l'extérieur, sa charge électrique reste constante. Ceci constitue la loi de conservation de la charge. Il s'agit là d'un postulat fondamental de l'électromagnétisme, jamais contesté expérimentalement.

2 Distributions de charges électriques statiques

Caractérisation d'une distribution de charges

Lorsque nous nous intéressons à un phénomène associé à la présence de charges électriques, il convient de commencer par préciser quelques caractéristiques de la distribution de charges considérée. S'agit-il d'une distribution de charges statiques ou mobiles ? Comment décrire leurs positions, leur quantité ? Cette description préalable de l'état du système de charges est indispensable, les techniques de calcul employées étant différentes suivant les cas rencontrés. Toutefois, comme nous allons le voir maintenant, il conviendra de garder en mémoire que, pour une même situation physique, plusieurs descriptions de la distribution de charges sont possibles, celle retenue dépendant du phénomène étudié.

Tout d'abord quand peut-on considérer qu'une distribution de charges est statique ? Comme toujours en physique, les conditions requises dépendent du problème étudié.

Par exemple, lorsqu'un isolant est chargé électriquement, les temps caractéristiques des déplacements de charges dans ce matériau sont extrêmement longs par rapport au temps nécessaire pour faire une mesure sur le système et pourront être considérés comme infinis. Cette propriété caractérise la nature isolante du matériau. La distribution de charges est alors réellement statique.

Cette condition n'est plus remplie dans le cas des conducteurs dans lesquels les charges se déplacent librement. Toutefois lorsque le conducteur est à l'équilibre, c'est-à-dire lorsque les électrons ne sont alors soumis à aucune force macroscopique, chaque électron, du fait des collisions, change de vitesse (en module et direction) environ 10^{18} fois par seconde. Moyennée sur des temps plus longs, cette vitesse électronique peut être décrite par une vitesse moyenne nulle. Aussi, dès lors que les phénomènes étudiés auront des temps caractéristiques supérieurs à 10^{-18} s, la distribution de charges dans des conducteurs à l'équilibre pourra, elle aussi, être considérée comme statique, bien que les charges soient en mouvement incessant. (Comme nous le verrons, l'électrostatique dans les milieux continus utilise des grandeurs physiques moyennes, aussi les fluctuations microscopiques sont-elles négligées.)

Notons enfin que cette notion de charges statiques dépend du référentiel dans lequel nous étudions la distribution de charges. En effet, le caractère statique d'une distribution est une notion relative. Une charge considérée comme fixe dans un référentiel ne le sera plus dans un autre. Nous reviendrons sur cet aspect lorsque nous décrirons les phénomènes électromagnétiques. Toutefois dans la suite, sauf mention explicite, nous considérerons le repère associé au laboratoire comme un référentiel absolu.

De la même façon, la description de la distribution spatiale des charges dépend de la nature du phénomène étudié, des dimensions caractéristiques associées et du degré de précision souhaité. Ainsi, suivant les cas, un même ensemble de charges pourra être décrit soit comme un ensemble de charges ponctuelles isolées, soit comme une distribution continue de charges. Prenons par exemple un cristal de chlorure de sodium NaCl (sel) : ce cristal ionique est constitué d'ions positifs Na^+ et d'ions négatifs Cl^-, répartis alternativement au sommet d'un réseau cubique, la distance entre les ions étant de l'ordre de l'angström (Å), c'est-à-dire 10^{-10} m. Supposons que nous voulions déterminer la force exercée sur un ion par tous les autres. Nous pourrions avoir envie de considérer tous les ions comme des individualités. En fait ce n'est pas nécessaire. Dans la plupart des cas,

il est suffisant d'accorder ce statut aux seuls ions proches voisins situés à des distances comparables à la distance inter-ionique ; les autres, plus éloignés donc moins facilement différenciables, pourront être considérés comme formant une distribution continue homogène de charges. Nous voyons donc qu'une même distribution pourra être appréhendée différemment suivant que nous en sommes loin ou près.

Ainsi de façon plus générale, si on étudie une distribution de charges à des distances du même ordre de grandeur que leur extension spatiale ou que la distance entre charges, il conviendra de considérer ces charges comme isolées et la distribution sera dite discrète ; à l'inverse, si les dimensions caractéristiques du problème étudié sont grandes devant celles de la distribution de charges, nous pourrons la décrire comme une distribution continue. Comment définir et évaluer ce qui est loin et ce qui près ? En fait, cela dépend du degré de précision souhaité. Dans l'exemple du chlorure de sodium, plus le nombre d'ions considérés comme charges individuelles sera important, plus grande sera la précision obtenue pour la force calculée, mais en contre-partie le calcul deviendra en général plus difficile. Il faudra trouver un compromis entre la précision du résultat et la simplification technique associée aux distributions continues.

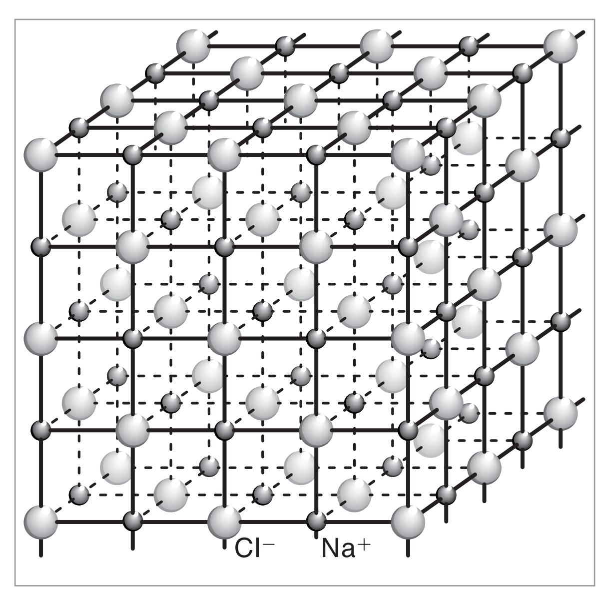


Fig. 2.1. Structure cristalline du chlorure de sodium.

Un peu d'histoire

Ion

Le mot *ion*, importé de l'anglais en 1840, est tiré du participe présent neutre du verbe *ienai* voulant dire « aller » en grec. Un ion est donc « quelque chose qui va ». L'ion est une particule qui se déplace sous l'influence d'un champ électrique.

Distribution discrète de charges – Charges électriques ponctuelles

Comme nous venons de le voir, si la distance entre les charges électriques est du même ordre de grandeur que les dimensions caractéristiques du problème posé, il convient de considérer les corps chargés comme des objets individualisés. Si de plus, le volume de chaque corps chargé est petit devant toutes les autres dimensions du problème, une bonne approximation consiste à identifier chacun de ces corps à un point, sans volume propre, auquel on associe une charge électrique correspondant à la charge totale du corps considéré. Cette abstraction mathématique est connue sous le nom d'« approximation des

charges ponctuelles ». Dans cette approximation, une répartition des charges électriques pourra être modélisée par une distribution de charges ponctuelles, c'est-à-dire par un ensemble de points caractérisés par leur position $\vec{r}_\mathrm{i}$, chaque point étant associé à une charge q_i. Nous parlerons alors de distribution discrète de charges électriques $(q_i, \vec{r}_i)$.

Distribution continue de charges électriques

Si toutes les dimensions du problème posé sont plus grandes que l'extension spatiale de la répartition des charges électriques ou si les charges portées par les corps constituant le système étudié sont très grandes devant la charge élémentaire, il n'est plus nécessaire de préciser la position des différentes charges élémentaires constituant cette distribution et il est alors légitime de faire abstraction du caractère discret de ces charges. La distribution de charges sera dite « continue » et sera caractérisée par une densité moyenne de charges électriques, définie en tout point de l'espace. Cette densité est par définition la limite, si elle existe, du quotient de la charge électrique $\mathrm{d}q$ contenue dans un petit élément par le volume $\mathrm{d}\tau$ (la surface $\mathrm{d}s$ ou la longueur $\mathrm{d}l$) de ce petit élément quand celui-ci tend vers zéro. On définit ainsi :

– la densité linéique de charges $\lambda = \mathrm{d}q/\,\mathrm{d}l$
– la densité surfacique de charges $\sigma = \mathrm{d}q/\,\mathrm{d}s$
– la densité volumique de charges $\rho = \mathrm{d}q/\,\mathrm{d}\tau$

2.2. Forces entre charges électriques statiques

Deux charges électriques exercent entre elles une force. À l'échelle microscopique, les forces électriques sont omniprésentes, tous les constituants élémentaires de la matière, à l'exception des neutrons, étant électriquement chargés. Toutefois à l'échelle macroscopique, ces forces sont en général de moyenne nulle, les corps étant à cette échelle, dans la plupart des cas, électriquement neutres. Pour que l'on puisse observer des forces électriques macroscopiques, elles doivent s'exercer entre des corps ayant rompu leur neutralité de charges.

1 Force entre deux charges ponctuelles - Loi de Coulomb

La force électrostatique existant entre deux charges considérées comme ponctuelles présente trois caractéristiques fondamentales :

– elle est répulsive ou attractive selon que les charges en interaction sont de même signe ou de signe opposé (cette propriété a été à l'origine de la classification des charges électriques en deux types distincts de charges) ;
– elle est radiale, c'est-à-dire s'exerce suivant la direction joignant les deux charges en interaction ;
– elle est de portée infinie ; deux charges électriques, aussi éloignées soient-elles, exercent l'une sur l'autre une force électrique.

L'ensemble des résultats expérimentaux concernant les forces exercées entre charges électriques peut être décrit par une loi, valable quelle que soit la distance entre les charges (au moins pour des distances supérieures aux distances nucléaires de l'ordre de 10^{-12} m) et quelle que soit la valeur de ces charges. Elle a été formulée par Charles Augustin Coulomb en 1784 et porte depuis le nom de loi de Coulomb.

Un peu d'histoire

Charles Augustin de Coulomb (1736-1806)

Né à Angoulême en 1736, Coulomb commence ses études à Paris puis à Montpellier où il devient à vingt ans membre d'une société savante et enfin retourne à Paris pour suivre les cours de l'École royale du génie de Mézières. L'école terminée, il occupe successivement des postes à Brest, en Martinique et à Cherbourg où il écrit un premier mémoire, *Recherches sur la meilleure manière de fabriquer des aiguilles aimantées*, qui lui vaut le prix de l'Académie des Sciences. Muté à Rochefort, il poursuit cependant des recherches sur la force de torsion et l'élasticité des fils métalliques. C'est à cette occasion qu'il mettra au point sa balance de torsion lui permettant en 1785 de formuler la loi d'attraction et de répulsion des charges électriques qui porte son nom. Pendant la révolution, nommé membre de la commission des poids et mesures jusqu'en 1793, date à laquelle il se retire dans ses terres, il continue ses travaux en introduisant notamment la notion de « moment magnétique ». Élu membre de l'institut sous le Consulat, Bonaparte le nomme inspecteur général de l'instruction publique.

Définition : Selon cette loi, la force $\vec{F}_1(\vec{r}_2)$ exercée dans le vide par la charge ponctuelle fixe q_1 située à la position $\vec{r}_1$, sur la charge ponctuelle fixe q_2 située à la position $\vec{r}_2$, a pour expression :

$$\vec{F}_1(\vec{r}_2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^2} \vec{u}_1(\vec{r}_2) \quad (2.1)$$

$\vec{u}_1(\vec{r}_2)$ est un vecteur unitaire dans la direction q_1q_2 et orienté de la charge q_1 vers la charge q_2, $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ est la distance entre les charges, ε_0 est une constante universelle mesurée expérimentalement, dite « permittivité diélectrique », qui caractérise le vide (puisque cette constante n'est accessible que par des mesures, elle n'est connue qu'avec une précision finie). Dans le système M.K.S.A, où la force s'exprime en newton (N), la charge en coulomb (C) et la distance en mètre (m), le coefficient de proportionnalité vaut :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8,987 \cdot 10^9 \mathrm{m}^3 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{A}^{-2} \cdot \mathrm{s}^{-4}$$

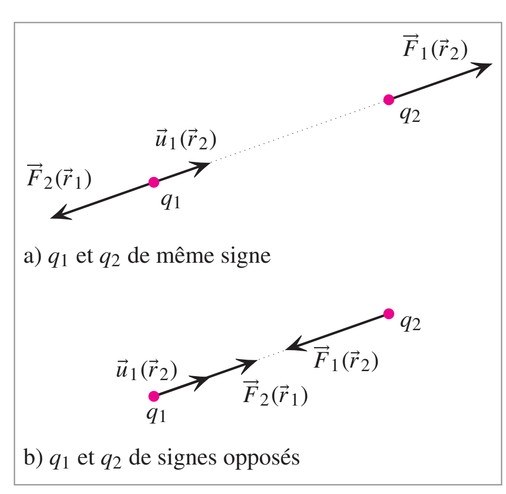


Fig. 2.2. Forces électrostatiques entre charges ponctuelles.

De plus, le principe d'action et de réaction impose que la force $\vec{F}_2(\vec{r}_1)$ exercée par la charge ponctuelle q_2 sur la charge ponctuelle q_1 soit égale et opposée à $\vec{F}_1(\vec{r}_2)$:

$$\vec{F}_1(\vec{r}_2) = -\vec{F}_2(\vec{r}_1)$$

Cette loi constitue, dans notre présentation, la loi fondamentale de l'électrostatique. Toutes les autres propriétés que nous allons maintenant présenter seront issues de cette loi de Coulomb. Cette caractéristique des forces électrostatiques fut une chance pour les physiciens du XVIII[e] siècle, en effet, la puissance du modèle paradigmatique de Newton était telle qu'il était impensable à l'époque de chercher une force ayant une autre forme (voir chapitre 1). Nous verrons au chapitre 7 comment cette loi, valable uniquement dans le vide, permet de construire l'expression de la force entre charges électriques dans un milieu quelconque.

Comme nous pouvons le constater sur l'expression 2.1, les forces électriques présentent les mêmes caractéristiques que les forces gravitationnelles, toutefois leur intensité est beaucoup plus importante. Comparons par exemple les modules des forces électrostatique et gravitationnelle entre l'électron et le proton d'un atome d'hydrogène éloignés d'une distance est r_0 :

$$F_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{pe}{r_0^2} \qquad F_g = \mathcal{G}\frac{m_e m_p}{r_0^2} \qquad \frac{F_e}{F_g} \simeq 10^{42}$$

où $\mathcal{G}$ est la constante de gravitation : $\mathcal{G} = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ MKSA.

Un autre exemple : la force électrique exercée entre deux charges de 1 C espacées de 1 m est égale à environ 10^{10} N, soit le poids sur la Terre d'une masse d'un million de tonnes. Cette différence d'intensité nous permettra de très souvent négliger les forces gravitationnelles entre charges devant les forces électriques. En revanche ces forces électriques sont beaucoup moins importantes que les forces nucléaires (interaction forte) existant à l'intérieur du noyau, ce qui explique la cohésion nucléaire en dépit de la répulsion coulombienne entre protons.

Recheche & Développement

Électrophorèse

Une solution colloïdale est une solution contenant un ensemble de micro-particules en suspension (poussières dans de l'eau, gouttes d'un nuage, globules sanguins en suspension...).

Ces particules possédant en général une charge électrique, lorsque l'on soumet un colloïde à l'action d'un champ électrique extérieur, les particules de ce système dispersé se déplacent. Ce phénomène est appelé « l'électrophorèse » (étymologiquement « transporté par l'électricité »). Ce phénomène est de plus en plus utilisé comme technique d'analyse mais aussi comme méthode de séparation

Considérons une particule de masse m et de charge électrique Ze, placée dans un champ électrique $\vec{E}$. Par définition cette particule subit une force $\vec{F}$ donnée par la relation $\vec{F} = Ze\vec{E}$. Sous l'effet de cette force, la particule se déplace en subissant une force de frottement due aux autres molécules de la solution, force $\vec{f}$ proportionnelle et opposée à sa vitesse $\vec{v}$: $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. La relation fondamentale de la dynamique permet d'écrire $m\frac{d\vec{v}}{dt} = Ze\vec{E} - \alpha\vec{v}$.

En régime stationnaire, $\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0}$ et la vitesse $\vec{v}_e$ de la particule est égale à $\vec{v}_e = \frac{Ze}{\alpha}\vec{E}$.

Chaque constituant est caractérisé par sa mobilité μ : $\mu = \frac{Ze}{\alpha}$ ayant quelques micromètres par seconde pour ordre de grandeur.

Ainsi, la mobilité de chaque constituant de la solution lui est spécifique : elle dépend de sa charge et de son coefficient de friction. On comprend aisément qu'en utilisant un tel procédé, on puisse séparer les particules d'une solution colloïdale et obtenir à l'état pur les substances les plus rapides ou les plus lentes.

2 Principe de superposition

L'expression 2.1 décrit la force de Coulomb entre deux charges ponctuelles dans le vide. Envisageons maintenant une situation faisant intervenir plusieurs charges.

Force entre une charge ponctuelle et une distribution discrète de charges

Commençons par déterminer la force exercée par une distribution discrète de charges $(q_i, \vec{r}_i)$ sur une charge q placée au point $\vec{r}$ (fig. 2.3). L'expérience a permis de montrer que la présence d'autres charges ne modifie pas la force entre deux charges particulières. Dans ce cas, la force résultante obéit à la règle générale de composition des forces et est égale à la simple somme vectorielle de toutes les contributions associées aux différentes paires (q, q_i). Ceci constitue le principe de superposition.

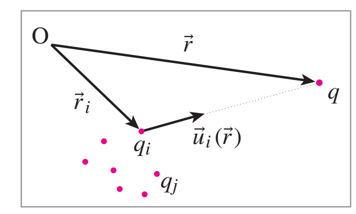


Fig. 2.3. Distribution discrète de charges $(q_i, \vec{r}_i)$.

Définition : La force $\vec{F}(\vec{r})$ exercée sur la charge q, située au point $\vec{r}$, par un ensemble de charges q_i situées en $\vec{r}_i$, est égale à

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \vec{u}_i(\vec{r}) \tag{2.2}$$

$\vec{u}_i(\vec{r})$ étant le vecteur unitaire dirige de la charge q_i vers le point $\vec{r}$.

Force entre une charge ponctuelle et une distribution continue de charges

L'expression de la force obtenue pour une distribution discrète de charges se généralise facilement au cas des distributions continues. La procédure à suivre est simple. Il convient dans un premier temps de calculer la force entre la charge ponctuelle q et la charge dq' contenue dans un élément infinitésimal de la distribution continue de charges centré en un point $\vec{r}\,'$. Cet élément étant par construction infiniment petit, la charge dq' peut être considérée comme ponctuelle, la force entre q et dq' est donc donnée par la loi de Coulomb (2.1). Dans un second temps, conformément au principe de superposition, toutes ces différentes contributions sont sommées sur tout le domaine occupé par la distribution continue. Suivant la nature de la distribution, nous obtenons ainsi les expressions suivantes :

– pour une distribution linéique de charges :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\vec{r}\,')\, dl(\vec{r}\,')}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^2} \vec{u}(\vec{r}) \tag{2.3}$$

– pour une distribution surfacique de charges :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iint_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}s(\vec{r}\,')}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^2}\vec{u}(\vec{r}) \tag{2.4}$$

– pour une distribution volumique de charges :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\tau(\vec{r}\,')}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^2}\vec{u}(\vec{r}) \tag{2.5}$$

Forces entre distributions continues de charges

Formellement la force électrique entre deux distributions continues de charges peut également être calculée en généralisant la procédure précédente. Il conviendra alors d'évaluer la force entre deux éléments infinitésimaux appartenant à chacune des deux distributions de charges, puis, après deux intégrations successives sur les domaines des deux distributions, de calculer la force résultante. C'est ainsi que la force entre deux distributions volumiques de charges, V_1 et V_2 s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{V_1}\iiint_{V_2} \frac{\rho_1(\vec{r}\,')\rho_2(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau_1(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\tau_2(\vec{r})}{|\vec{r}\,' - \vec{r}|^2}\vec{u}(\vec{r}) \tag{2.6}$$

Cette procédure s'étend sans difficultés aux calculs de forces faisant intervenir des distributions surfaciques ou linéiques de charges. Soulignons toutefois que dans la plupart des cas, ces doubles intégrations sont difficiles voire impossibles à calculer analytiquement, aussi a-t-il fallu développer d'autres techniques de calcul permettant de contourner ces difficultés. Ces techniques ont au préalable nécessité l'introduction de nouveaux concepts comme celui du champ électrostatique.

2.3. Le champ électrostatique dans le vide

Dans le paragraphe précédent, nous avons établi les expressions de la force entre charges électriques statiques. Nous allons montrer maintenant que cette même force peut également s'exprimer à partir d'une grandeur vectorielle associée à chaque point de l'espace : « le champ électrique ».

Comme nous le verrons, les propriétés générales du champ électrique offrent certains avantages et son usage permet entre autre de simplifier bon nombre de calculs. De plus, il s'agit d'une notion tout à fait générale, qui ne se restreint pas au cas de l'électrostatique mais qui au contraire prendra toute sa valeur dans le cas de charges en mouvement relatif. Nous y reviendrons dans les chapitres ultérieurs. Il faudra toutefois garder à l'esprit que les expressions et propriétés que nous donnons maintenant de ce champ correspondent au cas particulier de l'électrostatique. Pour qu'il n'y ait aucune ambiguïté, nous appellerons « champ électrostatique » le champ électrique associé à des charges statiques.

1 Définition du champ électrostatique

Comme le montrent les expressions 2.2 à 2.5, la force exercée par une distribution de charges (discrète ou continue) sur une charge q située au point $\vec{r}$ est proportionnelle à une somme qui ne dépend que de la valeur des charges q_i et des positions relatives $\vec{r} - \vec{r}_i$ des charges q et q_i. Cette somme vectorielle, indépendante de q, peut donc être considérée comme une grandeur caractéristique de l'espace au point $\vec{r}$. En d'autres termes, à chaque point de l'espace nous pouvons associer un vecteur qui caractérise la distribution $(q_i, \vec{r}_i)$. Ce vecteur, noté $\vec{E}(\vec{r})$, est par définition le champ électrostatique au point $\vec{r}$. Dans ce formalisme, la force électrostatique appliquée sur la charge q vaut par définition :

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}(\vec{r}) \tag{2.7}$$

2 Expressions du champ électrostatique

Champ électrostatique créé par une charge électrique

Le champ électrostatique créé par une charge peut être déterminé en comparant l'expression 2.1 de la force électrostatique entre deux charges donnée par la loi de Coulomb et l'expression 2.7 introduisant le champ $\vec{E}$.

Définition : Le champ électrostatique créé au point $\vec{r}$ par une charge q fixe, située au point $\vec{r}\,'$, a pour expression :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q\vec{u}_r}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2} \tag{2.8}$$

$\vec{u}_r$ étant le vecteur unitaire radial et fuyant la charge q :

$$\vec{u}_r = \frac{(\vec{r} - \vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Les figures 2.4.a et 2.4.b présentent le champ électrostatique créé en deux points fixes M et N par une charge q, respectivement positive et négative, placée à l'origine.

Par construction, le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle est radial, isotrope (toutes les directions sont équivalentes) et indépendant du temps puisque les charges sont statiques. Dans le système M.K.S.A., l'unité du champ électrostatique est le volt/mètre (et non le newton par coulomb comme le suggère la relation 2.7).

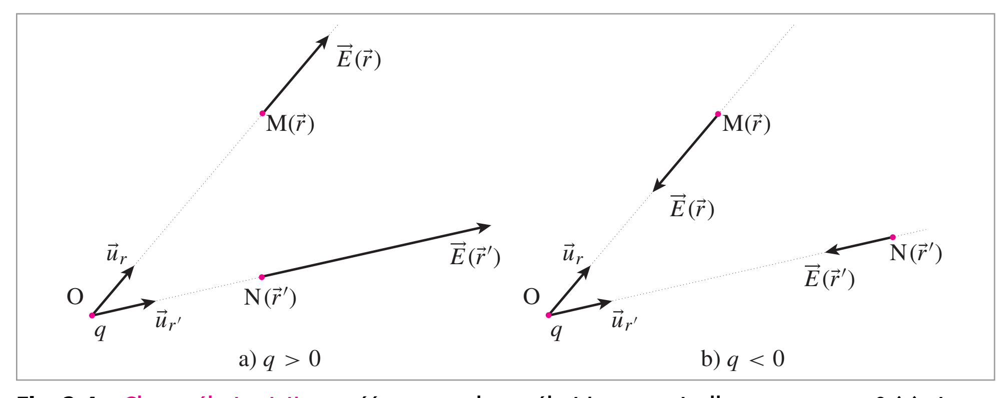


Fig. 2.4. Champ électrostatique **créé par une charge électrique ponctuelle q : pour $q > 0$ (a) et pour $q > 0$ (b).**

Champ électrostatique créé par une distribution discrète

Le champ électrostatique créé par une distribution discrète statique $(q_i, \vec{r}_i)$ peut être calculé en suivant la même démarche. En comparant les expressions 2.2 et 2.7, nous obtenons alors :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_i \frac{q\vec{u}_i(\vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \tag{2.9}$$

Nous constatons sur cette expression que le principe de superposition s'applique également au champ électrique : le champ électrostatique total créé au point $\vec{r}$ par une distribution discrète de charges est égal à la somme des champs électriques créés par chacune des charges q_i au point $\vec{r}$.

Champ électrostatique créé par une distribution continue

En généralisant la formule précédente, on obtient facilement les expressions du champ électrostatique créé par une distribution continue de charges statiques. C'est ainsi que le champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$ créé au point $\vec{r}$ par une distribution volumique continue $\rho(\vec{r}\,')$ contenue dans un volume V est la somme de tous les champs élémentaires créés par des charges élémentaires $\mathrm{d}q = \rho(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\tau$ centrées autour du point $\vec{r}\,'$ (fig. 2.5). Le champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$ a pour expression :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}r}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^2}\,\vec{u}_{r'} \tag{2.10}$$

Fig. 2.5. Champ électrostatique **créé par un élément infinitésimal de charge électrique dq.**

$\vec{u}_{r'}$ correspondant au vecteur unitaire fuyant la charge dq.

Cette expression s'étend immédiatement aux cas des distributions linéique et surfacique de charges. On peut en principe calculer en utilisant ces expressions le champ électrostatique créé par n'importe quelle distribution connue de charges. Soulignons encore une fois que les expressions du champ électrostatique que nous venons de donner ne sont valables que dans le cas de distributions de charges fixes, d'autres expressions seront nécessaires dans le cas de charges en mouvement relatif.

2.4. Le potentiel électrostatique dans le vide

Après avoir associé à chaque point $\vec{r}$ de l'espace une grandeur vectorielle $\vec{E}(\vec{r})$, nous allons maintenant montrer que l'on peut aussi caractériser chaque point de l'espace par une grandeur scalaire que nous appellerons « potentiel électrostatique » et noterons $V(\vec{r})$.

1 Existence d'un potentiel électrostatique

Supposons une charge q placée dans le champ électrostatique $\vec{E}$ créé par une distribution de charges quelconque et évaluons l'énergie qu'il faudrait échanger avec cette charge pour la déplacer infiniment lentement d'une position initiale I à une position finale F (fig. 2.6). Le travail du manipulateur devra être exactement opposé à celui de la force électrique $\vec{F} = q\vec{E}$ à laquelle est soumise la charge q. L'expression de ce travail est donné par l'intégrale curviligne :

$$W_{\mathrm{IF}} = -q \int_{\mathrm{I}}^{F} \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}(\vec{r}) \tag{2.11}$$

expression dans laquelle $\mathrm{d}\,l(\vec{r})$ représente un élément infinitésimal de déplacement, centré au point $\vec{r}$, le long du trajet IF.

Ce travail est indépendant du trajet suivi. Il ne dépend que du point de départ I et du point d'arrivée F. On peut comprendre facilement pourquoi il en est ainsi en électrostatique. Supposons que ce travail soit différent d'un trajet à l'autre, nous pourrions alors considérer des circuits fermés sur lesquels le trajet « retour » ne serait pas identique au trajet « aller ». Dans ce cas, le travail « retour » n'aurait aucune raison de compenser le travail « aller ». Le travail total sur le cycle serait différent de zéro. Autrement dit le travail fourni dans un sens de parcours ne serait pas restitué lors du parcours dans l'autre sens. Ceci est impossible. En effet, le champ électrostatique étant créé par définition par des charges immobiles, l'état de l'univers après un tour ne peut être qu'identique à celui de l'état initial : la conservation de l'énergie impose que l'énergie totale échangée avec la charge q au cours d'un cycle soit nulle.

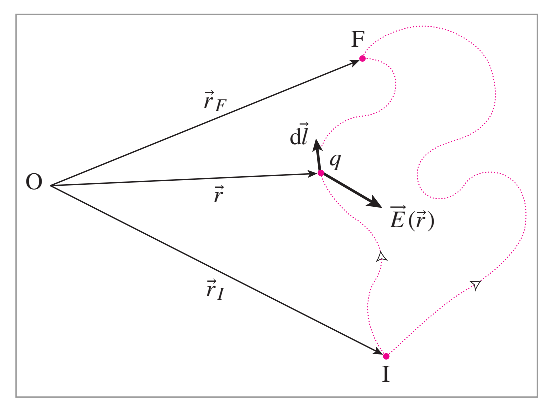


Fig. 2.6.

Nous allons démontrer d'une autre façon ce résultat en utilisant une des propriétés de la loi de Coulomb dans le cas d'un champ créé par une charge ponctuelle, la démonstration se généralisant aisément au cas d'un champ créé par une distribution continue de charges.

Soit une charge Q placée à l'origine. Cette charge crée en tout point de l'espace un champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ radial donné par l'expression 2.8, en prenant $\vec{r}\,' = 0$.

Pour déplacer une charge q de I à F dans ce champ électrique, on peut lui faire emprunter une infinité de trajets. Prenons par exemple le trajet IA′F indiqué sur la figure 2.7 et calculons l'énergie échangée sur ce trajet. On peut décomposer le travail nécessaire au passage de I à F en deux contributions : celui nécessaire au passage de I à A′ puis celui de A′ à F. Sur l'arc de cercle IA′, la charge se déplace sur une trajectoire telle qu'en tout point le champ $\vec{E}(\vec{r})$ et le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\,\vec{l}(\vec{r})$ sont orthogonaux puisque le champ crée par la charge Q est radial. Le travail associé au déplacement sur cet arc est nul. En revanche, sur la portion de déplacement de rayon

A′F, le champ $\vec{E}$ et le vecteur déplacement d$\vec{l}$ sont parallèles, le travail n'est donc pas nul a priori sur cette portion. Le travail total a pour expression :

$$W_{\mathrm{IF}} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r'_A=r_I}^{r_F}\frac{Q\,\mathrm{d}r}{r^2} = -\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_I}-\frac{1}{r_F}\right) \qquad (2.12)$$

Comparons ce travail à celui que nous obtiendrions sur n'importe quel autre trajet. On peut décomposer un trajet quelconque en une suite d'arcs et de portions de rayons infinitésimaux (voir figure 2.7). En généralisant la démonstration précédente à chacun de ces éléments d'arcs de cercle, on constate comme précédemment que le travail est nul sur les arcs. En sommant toutes ces contributions radiales nous retrouvons pour le travail total une expression strictement identique à l'expression 2.12. Le travail à échanger avec la charge q est donc indépendant du chemin suivi. Aussi, la quantité W_{IF}/q ne dépend-elle que de la charge Q qui crée le champ électrostatique dans lequel se déplace la charge q et des positions initiale et finale de q, caractérisées par $\vec{r}_{\mathrm{I}}$ et $\vec{r}_{\mathrm{F}}$. Ce résultat suggère que nous puissions caractériser chaque point $\vec{r}$ de l'espace par une grandeur scalaire $V(\vec{r})$ appelée « potentiel électrostatique », le travail à échanger avec la charge q pour la déplacer de I à F étant égal par convention à la variation de cette grandeur entre I et F :

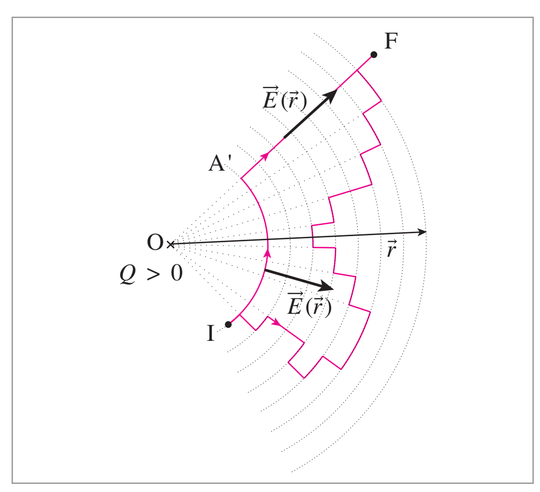


Fig. 2.7.

$$W_{\mathrm{IF}} = q\big(V(F) - V(I)\big) \qquad (2.13)$$

Un peu d'histoire

Histoire du potentiel

Dès qu'ils furent connus, l'ensemble des résultats de Coulomb et de Cavendish concernant l'attraction et la répulsion entre charges électriques furent refondues par Lagrange qui, par analogie avec la théorie newtonienne, introduisit en chaque point de l'espace une fonction « somme de toutes les masses électriques divisées chacune par leur distance à ce point », fonction dont pouvait être déduite la force électrique. C'est en 1782 que Laplace montra que cette même fonction vérifie une équation aux dérivées partielles que la postérité appela « équation de Laplace ». Ce fut Green qui, publiant en 1828 « *Essay on The Application of The Mathematical Analysis to The Theory of Electricity and Magnetism* », appela cette fonction « potentiel électrique ».

2 Définition du potentiel électrostatique

Potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle

L'expression du potentiel électrostatique créé par une charge ponctuelle est obtenue en comparant les relations 2.12 et 2.13. Ces deux expressions peuvent être satisfaites en prenant pour définition du potentiel électrostatique $V(\vec{r})$ créé au point $\vec{r}$ par la charge Q placée à l'origine :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} + K \tag{2.14}$$

Notons que ce potentiel n'est défini qu'à une constante additive K près (il est indispensable de déterminer cette constante pour définir complètement le potentiel électrostatique, toutefois il convient de garder à l'esprit que seule une différence de potentiel a un sens physique). Pour fixer cette constante, il suffit de se donner, de façon arbitraire, la valeur du potentiel en un point. Ainsi, si l'on pose que le potentiel crée par la charge ponctuelle Q est nul à l'infini, on trouve que le potentiel en $\vec{r}$ est :

$$V(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} \tag{2.15}$$

Si la charge Q était située en $\overrightarrow{r_Q}$, l'expression du potentiel au point $\vec{r}$ serait de la forme :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}_Q|} + K \tag{2.16}$$

Potentiel électrostatique créé par une distribution ponctuelle de charges

Comme nous l'avons fait pour les forces électriques et le champ électrostatique, nous pouvons généraliser ces définitions aux cas de distributions discrètes de charges. Le champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$ créé par une distribution discrète $(q_i, \vec{r}_i)$ est, nous l'avons vu, la superposition des champs $\vec{E}_i(\vec{r})$ créés par chacune des charges. Ainsi le travail nécessaire pour déplacer une charge q dans le champ électrique $\vec{E}(\vec{r})$ est égal à la somme des travaux nécessaires au déplacement de la charge q dans chaque champ $\vec{E}_i(\vec{r}\,')$. Le potentiel créé par une distribution de charges est donc la somme algébrique des potentiels associés à chaque charge de la distribution et a pour expression :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_i \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} + K \tag{2.17}$$

Si toutes les charges q_i sont situées à distance finie, nous pouvons encore choisir le potentiel nul à l'infini. La constante K est alors égale à 0.

Potentiel électrostatique créé par une distribution continue de charges

On généralise aisément l'expression précédente au cas des distributions continues de charges. Ainsi, le potentiel électrostatique créé par une distribution volumique continue de charges s'obtient par intégration, sur tout le volume chargé, du potentiel élémentaire créé par la contribution élémentaire de charge $\rho(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}\tau$ centrée au point $\vec{r}\,'$ (ou $\sigma\,\mathrm{d}s$ ou $\lambda\,\mathrm{d}l$) :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,\mathrm{d}\tau + K \tag{2.18}$$

La détermination de la constante K est dans ce cas plus délicate que dans les deux précédents. Si cette distribution continue présente des charges à l'infini (par exemple droites ou plans infinis chargés) on ne peut plus considérer le potentiel comme nul à l'infini et prendre $K = 0$; il faudra alors choisir arbitrairement un point de l'espace et lui associer le potentiel nul. Dans tous les autres cas, nous pourrons prendre $K = 0$. Dans le cas général, le potentiel électrostatique est défini par des relations équivalentes à la relation 2.18, la densité de charges variant avec le temps, mais la force ne peut plus s'exprimer selon la loi du Coulomb. Les expressions obtenues pour le potentiel électrostatique demeureront valables dans le cas de charges mobiles. Cela peut paraître étrange puisque nous les avons déduites de celles du champ électrostatique, qui elles sont spécifiques du cas électrostatique. En fait, si on peut en électrostatique déduire le potentiel électrostatique de la force de Coulomb, ce n'est plus justifié dans le cas général.

Recheche & Développement

Membrane cellulaire

Toute membrane cellulaire présente une différence de potentiel électrostatique, dite de membrane, entre ses deux faces. Cette différence de potentiel peut être très importante, notamment dans le cas de cellules neuronales pour lesquelles elle peut être de l'ordre de plusieurs dizaines de millivolts, le potentiel de la face externe étant toujours supérieur à celui de la face interne. L'épaisseur de ces membranes cellulaires étant de l'ordre d'une centaine d'angström (Å), cette différence de potentiel correspond à des champs électrostatiques gigantesques, d'environ 10^5 V/m.
Sans entrer dans les détails, précisons que l'origine de ces potentiels est associée à la perméabilité sélective des membranes. Dans le cas des membranes des neurones (cellules nerveuses), on observe une différence sensible de concentration de certains cations comme Na^+ et K^+ entre l'intérieur et l'extérieur de la cellule, entraînant l'apparition d'une différence de potentiel. La diffusion spontanée des ions, qui tend à rétablir l'équilibre de concentration, est en permanence compensée par un pompage sélectif qui maintient l'écart. Sous l'action d'excitations externes (mécaniques, thermiques, électrostatiques...), cette perméabilité sélective des membranes est modifiée, ce qui conduit à une variation de la différence de potentiel de membrane. Le phénomène de l'influx nerveux, caractérisé par une baisse brutale du potentiel transmembramaire suivie de sa restauration, résulte de l'ouverture temporaire de voies de passage pour les cations (Na^+) suivie d'un retour au déséquilibre de concentration. Ainsi, de proche en proche, l'excitation se propage.
C'est pour avoir compris que ces potentiels membranaires participent à la propagation de l'influx nerveux que Hodgkin et Huxley reçurent le prix Nobel en 1963.

3 Le champ électrostatique « dérive » du potentiel électrostatique

Relation entre le champ électrostatique et le potentiel électrostatique

Nous venons de voir qu'une charge électrostatique ponctuelle tout comme une distribution de charges, discrète ou continue, crée en chaque point de l'espace une grandeur vectorielle, le champ électrostatique, et une grandeur scalaire, le potentiel électrostatique. Nous allons maintenant établir une relation simple entre ces deux grandeurs.

Supposons que nous voulions déplacer infinitésimalement une charge q placée dans un champ électrostatique $\vec{E}$ de la position $\vec{r}$ à la position voisine $\vec{r} + \mathrm{d}\,\vec{r}$. Par définition, l'énergie à échanger avec la charge q est égale à :

$$\mathrm{d}\,W = -q\vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\,\vec{r} = q\big(V(\vec{r} + \mathrm{d}\,\vec{r}) - V(\vec{r})\big) \tag{2.19}$$

Plaçons-nous en coordonnées cartésiennes et supposons que le déplacement infinitésimal s'effectue uniquement selon l'axe Ox. L'expression 2.19 se réduit alors à :

$$\mathrm{d}\,W = -qE_{\mathrm{x}}(\vec{r})\,\mathrm{d}\,x = qV(x + \mathrm{d}\,x) - qV(x) = q\frac{\partial V}{\partial x}\,\mathrm{d}\,x$$

$E_{\mathrm{x}}(\vec{r})$ étant la composante suivant Ox du champ au point $\vec{r}$. Nous trouverions des relations équivalentes faisant intervenir $E_{\mathrm{y}}(\vec{r})$ et $E_{\mathrm{z}}(\vec{r})$ pour un déplacement de la charge q respectivement suivant Oy et Oz. Par identification, nous pouvons réécrire les composantes du champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$ en fonction des variations locales du potentiel $V(\vec{r})$:

$$\begin{aligned} E_{\mathrm{x}}(\vec{r}) &= -\frac{\partial V}{\partial x}(\vec{r}) \\ E_{\mathrm{y}}(\vec{r}) &= -\frac{\partial V}{\partial y}(\vec{r}) \\ E_{\mathrm{z}}(\vec{r}) &= -\frac{\partial V}{\partial z}(\vec{r}) \end{aligned} \tag{2.20}$$

On dit que le champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$ dérive du potentiel $V(\vec{r})$. Si nous introduisons l'opérateur $\vec{\nabla}$ correspondant aux coordonnées cartésiennes (voir annexe), nous constatons que la relation 2.20 s'écrit simplement :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r}) \tag{2.21}$$

$\vec{\nabla}V$ se lisant « gradient de V ». Ce résultat se généralise aisément à tous les systèmes de coordonnées, à condition bien entendu d'employer les expressions correspondantes de l'opérateur $\vec{\nabla}$ qui sont données en annexe.

Notons que ce résultat montre que le potentiel doit être une fonction continue dans tout l'espace. En effet, une discontinuité du potentiel entraînerait une valeur infinie du champ électrostatique au niveau de cette discontinuité. Nous y reviendrons au chapitre 4.

2.5. Lignes de champ et surfaces équipotentielles

Les lignes de champ du champ électrostatique, introduites initialement par Faraday, étaient vues comme de véritables lignes dans l'espace, appelées lignes de forces. Aujourd'hui, ces lignes ne sont plus qu'une façon simple de représenter le champ électrostatique, les surfaces équipotentielles associées étant des ensembles de points de l'espace ayant la même valeur du potentiel.

Lignes de champ

Définition : **Les lignes de champ sont des courbes de l'espace auxquelles le champ électrostatique est en tout point tangent.**

Tant que le champ électrostatique est un vecteur défini non nul, on peut suivre une ligne de champ de façon continue. Aucun point ne peut porter plusieurs lignes de champ, sauf s'il s'agit d'un point singulier pour lequel le champ n'est pas défini (les points correspondants aux charges elles-mêmes) ou d'un point où le champ électrostatique est nul (exemple : un centre de symétrie de distribution). En effet, dans tous les autres cas, un croisement des lignes de champ signifierait qu'il existe deux orientations possibles du champ électrostatique $\vec{E}$ pour un même point, ce qui est strictement impossible par définition du champ électrostatique. Cette règle montre que les lignes de champ ne doivent commencer ou s'arrêter que sur des points singuliers ou des points tels que $\vec{E} = \vec{0}$; elles peuvent également naître ou s'éloigner à l'infini.

Les lignes de champ ne donnent pas l'intensité du champ électrostatique. Toutefois, si nous adoptons pour règle de construction que le nombre de lignes par unité d'aire perpendiculaire aux lignes est proportionnel à l'intensité du champ, nous pouvons constater qu'elles se resserrent dans les régions de champ intense et qu'au contraire elles s'écartent dans les régions de champ faible.

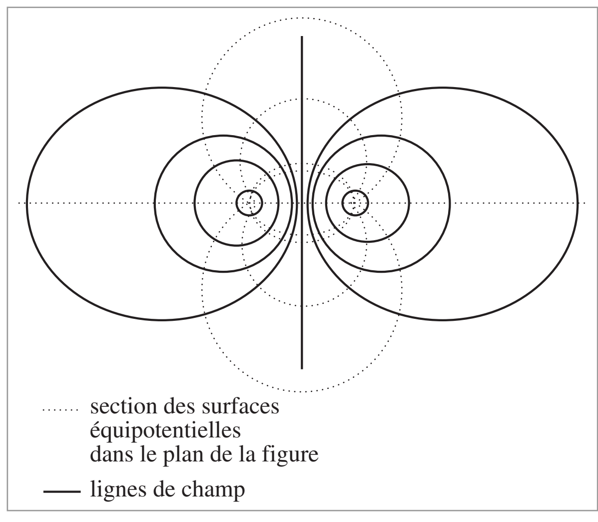


Fig. 2.8. **Lignes de champ et surfaces équipotentielles créées par deux charges ponctuelles positives égales.**

Pour tracer ces lignes de champ, nous pouvons déterminer les solutions du système différentiel issu de la relation $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r})$. En coordonnées cartésiennes par exemple, les variables (x, y, z) seront liées par les relations :

$$\frac{\mathrm{d}x}{E_x} = \frac{\mathrm{d}y}{E_y} = \frac{\mathrm{d}z}{E_z} \tag{2.22}$$

Surfaces équipotentielles

Définition : **Les surfaces équipotentielles sont constituées par l'ensemble des points correspondant à la même valeur du potentiel. Ces surfaces sont orthogonales aux lignes de champ.**

En effet, en chaque point d'une telle surface, le champ électrostatique qui oriente la ligne de champ correspondante indique l'orientation du gradient de potentiel : celui-ci est nécessairement perpendiculaire à la surface qui caractérise l'ensemble des points équipotentiels.

Une surface équipotentielle est solution de l'équation différentielle

$$E_x\,\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}z = 0$$

2.6. Applications de ces définitions à quelques exemples

Dans les paragraphes précédents, nous avons introduit les principales définitions concernant l'électrostatique. Nous allons maintenant les appliquer à quelques exemples simples.

1 Exemple d'une distribution discrète

Considérons deux charges ponctuelles égales, $q_A = q_B = q$, séparées par une distance $2a$, placées en $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$. Par commodité, on pourra prendre l'origine des espaces au milieu O de AB, $\vec{r}_A = -\vec{r}_B$ (fig. 2.9).

Force électrostatique

Considérons maintenant une troisième charge Q de même signe que q placée en un point M quelconque. Formellement, nous pouvons calculer les forces $\vec{F}_A$ et $\vec{F}_B$ exercées respectivement par les charges en A et B sur cette charge Q en utilisant la relation 2.2. La force totale s'écrit

$$\begin{aligned}\vec{F}(\vec{r}) &= \vec{F}(\vec{r}_A) + \vec{F}(\vec{r}_B) \\ &= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_A}{|\vec{r}_A - \vec{r}_M|^2}\vec{u}_A(\vec{r}_M) + \frac{q_B}{|\vec{r}_B - \vec{r}_M|^2}\vec{u}_B(\vec{r}_M)\right)\end{aligned}$$

Pour simplifier le calcul de cette somme vectorielle, nous allons supposer de plus que la charge Q est située dans le plan médian de AB.

Dans le système de coordonnées cartésiennes $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$ choisi sur la figure 2.9, les vecteurs $\vec{u}_A$ et $\vec{u}_B$ ont pour composantes :

$$\vec{u}_A(\vec{r}_M) = (\cos\theta, \sin\theta);$$
$$\vec{u}_B(\vec{r}_M) = (-\cos\theta, \sin\theta)$$

tandis que le point M est de coordonnées $(0, y)$. Ainsi la force totale $\vec{F}(\vec{r}_M)$ a pour expression :

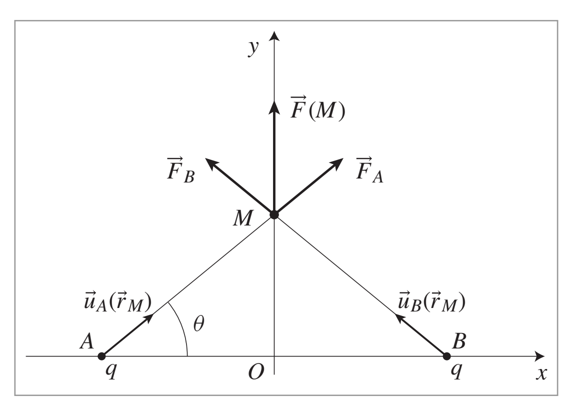


Fig. 2.9. Force électrostatique **exercée sur une charge $Q > 0$ par deux charges ponctuelles $q > 0$.**

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\sin\theta}{a^2 + y^2}\vec{u}_y = \frac{2Qq}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}\vec{u}_y$$

Cette force $F(\vec{r}_M)$ est dans la direction de la droite passant par M et appartenant au plan médian. Nous verrons au chapitre 3 que ce résultat aurait pu être anticipé en utilisant des arguments de symétrie. Lorsque y est grand devant a, on peut alors négliger a^2 devant

y^2 dans l'expression de $\vec{F}(\vec{r})$. La force est ainsi égale en première approximation à :

$$\vec{F}(\vec{r}) = \frac{2qQ}{4\pi\varepsilon_0 y^2}\vec{u}_y$$

Nous pouvons constater sur cette expression que tout se passe comme si les charges q_A et q_B étaient placées à l'origine. Cet exemple illustre les commentaires effectués au paragraphe 2 concernant les distributions de charges.

Champ et potentiel électrostatique

Le champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r}_M)$ créé au point M par les charges q_A et q_B peut donc s'écrire, en vertu de la relation 2.7 :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{(a^2+y^2)^{3/2}}\vec{u}_y$$

Pris nul à l'infini, le potentiel électrostatique $V(\vec{r}_M)$ s'écrit quant à lui :

$$V(\vec{r}) = \frac{2q}{4\pi\varepsilon_0(a^2+y^2)^{1/2}}$$

On peut montrer aisément avec ces expressions que la relation 2.21, liant le champ électrostatique au potentiel, est bien vérifiée.

2 Exemple d'une distribution continue

Considérons maintenant un fil « infini », chargé uniformément et caractérisé par une densité linéique de charge $\lambda > 0$ (fig. 2.10). Calculons le champ et le potentiel en point M situé à la distance $\vec{r}$ du fil. La distribution de charges présentant une symétrie axiale, il convient d'utiliser les coordonnées cylindriques (r, θ, z) pour décrire la position du point M. Par commodité, l'origine est choisie au point d'intersection O de l'axe de révolution avec le plan perpendiculaire contenant M.

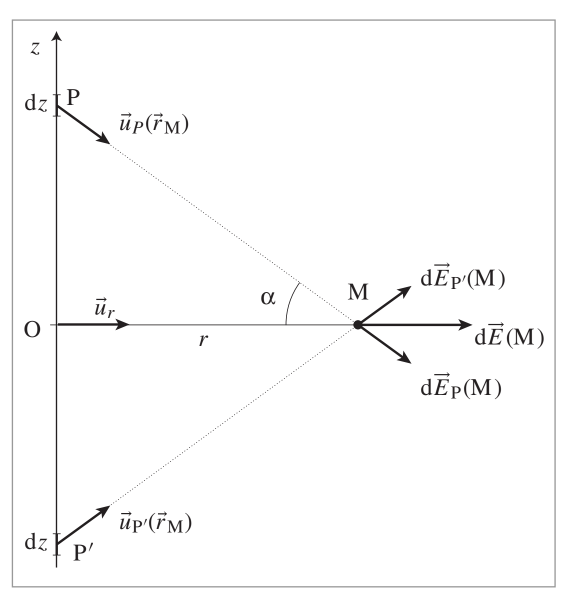


Fig. 2.10. **Champ électrostatique créé par deux contributions infinitésimales symétriques d'un fil infini chargé uniformément.**

Champ électrostatique créé par un fil rectiligne infini

Pour calculer ce champ électrostatique, nous allons appliquer le principe de superposition en découpant le fil en éléments infinitésimaux puis en sommant toutes les contributions. Soit donc une charge élémentaire $\mathrm{d}q$ contenue dans l'élément de longueur $\mathrm{d}z$ et située en P, à une distance z de l'origine. Puisque le fil est uniformément chargé, on a $\mathrm{d}q = \lambda\,\mathrm{d}z$. La contribution élémentaire au champ électrostatique créée par cet élément de charge au point M s'écrit :

$$\mathrm{d}\vec{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{M}) = \frac{\lambda\,\mathrm{d}z\,\vec{u}_{\mathrm{P}}(z)}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)}$$

Dans cette expression $\vec{u}_{\mathrm{P}}(z)$ définit le vecteur unitaire dans la direction PM. Pour calculer le champ total, il convient maintenant de faire la somme vectorielle de toutes ces contributions élémentaires. Il est judicieux de commencer par les regrouper deux par deux. En effet, considérons maintenant la contribution d'un élément de longueur $\mathrm{d}z$ situé en P′, symétrique de P par rapport à O, et sommons les contributions élémentaires créées par P et P′ :

$$\mathrm{d}\vec{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{M}) + \mathrm{d}\vec{E}_{\mathrm{P'}}(\mathrm{M}) = \frac{\lambda\,\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0}\big(\vec{u}_{\mathrm{P}}(z) + \vec{u}_{\mathrm{P'}}(-z)\big) \tag{2.23}$$

La somme vectorielle $\vec{u}_{\mathrm{P}}(z) + \vec{u}_{\mathrm{P'}}(-z)$ donne par symétrie une contribution perpendiculaire au fil. Cette composante radiale a pour module :

$$|\mathrm{d}\vec{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{M}) + \mathrm{d}\vec{E}_{\mathrm{P'}}(\mathrm{M})| = \frac{\lambda\,\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)}\big(\vec{u}_{\mathrm{P}}(z) + \vec{u}_{\mathrm{P'}}(-z)\big)\cdot\vec{u}_{\mathrm{r}} \tag{2.24}$$

Ceci se généralise à tous les couples de points (P, P′) situés de part et d'autre de l'origine. Le fil étant infini, pour toute charge élémentaire $\mathrm{d}q$ située en P, on pourra trouver sur le fil une autre charge située en P′, de telle sorte que les composantes parallèles au fil s'annulent. Toutes ces contributions de paires (P, P′) étant radiales, leur somme le sera également. Le champ électrostatique total créé par un fil infini est donc radial (indiquons encore une fois que l'utilisation des propriétés de symétrie du système aurait pu nous permettre d'accéder directement à cette conclusion ; nous y reviendrons au chapitre suivant) :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_{\mathrm{r}}(\vec{r})\vec{u}_{\mathrm{r}}$$

L'orientation du champ électrostatique total ainsi déterminée, il ne reste plus qu'à en calculer le module $E_{\mathrm{r}}(\vec{r})$ qui ne dépend que de la distance r. Pour ce faire, il suffit d'effectuer la somme des contributions données par l'expression 2.24. Au préalable, il convient de la réexprimer en fonction de l'angle α entre OM et PM. La contribution de la paire (P, P′) est égale à :

$$|\mathrm{d}\vec{E}_{\mathrm{P}}(\mathrm{M}) + \mathrm{d}\vec{E}_{\mathrm{P'}}(\mathrm{M})| = \frac{\lambda\,\mathrm{d}z}{4\pi\varepsilon_0(z^2+r^2)}2\cos\alpha = \frac{\lambda\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.25}$$

puisque $\cos\alpha = \dfrac{r}{(z^2+r^2)^{1/2}} \qquad \tan\alpha = \dfrac{z}{r}$

$$dz = r\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

Le module du champ électrostatique total créé par toutes les charges du fil s'obtient en sommant sur toute les paires (P, P′), ce qui revient à intégrer l'expression 2.25 entre 0 et $\frac{\pi}{2}$:

$$E_r(\vec{r}) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\lambda\cos\alpha\, d\alpha}{2\pi\varepsilon_0 r} = \left[\frac{\lambda\sin\alpha}{2\pi\varepsilon_0 r}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \tag{2.26}$$

Potentiel électrostatique créé par un fil rectiligne infini

Pour calculer le potentiel électrostatique créé par ce fil infini au point $M(r, \theta, z)$, nous allons ici utiliser la relation 2.21 liant le champ et le gradient du potentiel. En coordonnées cylindriques, nous avons les relations suivantes :

$$E_r(r,\theta,z) = -\frac{\partial V(r,\theta,z)}{\partial r}$$
$$E_\theta(r,\theta,z) = -\frac{\partial V(r,\theta,z)}{r\partial\theta}$$
$$E_z(r,\theta,z) = -\frac{\partial V(r,\theta,z)}{\partial z}$$

Nous venons de démontrer dans la section précédente que le champ électrostatique était radial. $E_\theta(r,\theta,z)$ et $E_z(r,\theta,z)$ sont donc nuls, ce qui veut dire que le potentiel électrostatique est indépendant de θ et z. À partir de l'expression 2.26, nous pouvons calculer l'expression du potentiel électrostatique $V(r)$. Par simple intégration par rapport à r, nous obtenons :

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln r + K$$

Rappelons que le fil étant infini, on ne peut pas prendre le potentiel nul à l'infini ; la constante K devra être déterminée en choisissant arbitrairement la position correspondant au potentiel nul.

Exercices

1 On sépare les électrons et les protons d'un gramme d'hydrogène et on les écarte de la distance Terre-Lune. Calculer la force de Coulomb qui en résulte et la comparer à la force gravitationnelle correspondante.
On donne :
Nombre d'Avogadro : $6\cdot10^{23}$; constante de gravitation $\mathcal{G} = 6,67\cdot10^{-11}$ MKSA ; $\frac{M_{proton}}{m_{électron}} = 1840$; $m_{électron} = 9\cdot10^{-31}$ kg ; la distance Terre-Lune est de $38,5\cdot10^4$ km.

2 On distribue des charges de même valeur sur les sommets d'un cube, chaque arête de longueur a joignant deux charges de signes opposés.

- Intuitivement, pensez-vous que les huit charges ont tendance à se rapprocher ou à s'éloigner ?
- Vérifier votre intuition en calculant, la force qui s'exerce sur chacune des charges.

Indice. *Calculer la résultante des forces sur la diagonale du cube.*

3 Deux boules de liège identiques de masse m et portant la même charge q sont attachées à deux fils de longueur l et suspendues en un même point.

a. Trouver l'angle θ que font les deux fils avec la verticale quand l'équilibre est atteint.

b. Quelle charge q faut-il déposer sur chacune des boules de liège pour que $\theta = 5°$, si $m = 1,6 \cdot 10^{-2}$ g et $l = 20$ cm.

c. Les deux fils sont maintenant suspendus en deux points espacés de la distance d. Comment pourrait-on utiliser ce montage pour vérifier expérimentalement la loi de variation de l'inverse du carré de la distance en mesurant l'angle θ pour différentes valeurs de d ?

4 Un noyau d'uranium a une charge de 92 p.

a. Donner le sens, la direction et le module du champ électrostatique dû au noyau à la distance de 1 Å ($= 10^{-10}$ m) de celui-ci.

b. En déduire le sens, la direction et le module de la force qui s'exerce sur un électron à cette distance.

5 Soient deux charges q et $-q$ repérées dans un plan (x, y) respectivement par leurs coordonnées $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ et $\left(-\frac{a}{2}, 0\right)$.
On donne : $q = 1,11 \cdot 10^{-10}$ C et $a = 10^{-2}$ m.

Donner le sens, la direction et le module du champ électrostatique résultant aux différents points du plan xOy suivants :

(1) $M(0, a)$, $M'\left(0, -\frac{a}{2}\right)$, $O(0, 0)$;

(2) $N(a, 0)$, $N'(-a, 0)$;

(3) $P(a, a)$, $P'\left(\frac{a}{4}, \frac{a}{4}\right)$;

(4) Existe-t-il, en dehors de l'infini, des points où le champ est nul ?

6 Calculer la différence de potentiel $V_A - V_B$ entre deux points A et B distants respectivement de a et b d'un fil « infini » uniformément chargé avec une densité linéique λ.
Calculer $V_A - V_B$ si $\lambda = 10^{-10}$ C/m, $a = 5$ cm, $b = 10$ cm en sachant que le potentiel du point C situé à 20 cm du fil est choisi comme origine des potentiels.

7 Donner l'expression de la densité superficielle σ qu'il faut introduire sur un plan conducteur supposé « infini » pour qu'une charge « ponctuelle » q répartie uniformément sur une petite sphère de masse m tienne en équilibre au dessus du plan. Calculer σ si $q = 10^{-7}$ C et $m = 0,9$ g. L'équilibre dépend-t-il de la position de la charge q au dessus du plan ? Que se passe-t-il si, une fois la charge en équilibre, on augmente légèrement σ ?
Indice. *On supposera la charge ponctuelle.*

Chapitre 3

Propriétés du champ électrostatique

Le champ électrostatique créé par une charge ponctuelle est radial et obéit à une loi en $1/r^2$. Ces caractéristiques induisent des propriétés des champs électrostatiques que nous allons étudier dans ce chapitre. Nous y démontrerons en particulier le théorème de Gauss, théorème fondamental de l'électrostatique, que nous appliquerons ensuite à quelques distributions de charges.

3.1 Propriétés associées au caractère radial du champ électrostatique

1 Circulation du champ électrostatique

2 Rotationnel du champ électrostatique

3.2 Propriétés associées à la dépendance en $1/r^2$ de l'intensité du champ électrostatique

1 Flux d'un champ électrostatique à travers une surface fermée

2 Théorème de Gauss

3 Expression locale du théorème de Gauss. Divergence du champ électrostatique

3.3 Propriétés de symétrie du champ électrostatique

1 Symétries et variables pertinentes

2 Symétries et orientations du champ électrostatique

3.4 Exemple d'utilisation des propriétés du champ électrostatique

1 Continuité de la composante tangentielle du champ électrostatique

2 Discontinuité de la composante normale du champ

3.5 Calcul du champ électrostatique créé par des distributions de charges de symétrie élevée

1 Principe de la méthode

2 Calcul du champ électrostatique créé par une distribution à symétrie sphérique chargée uniformément

3 Calcul du champ créé par un fil cylindrique infini uniformément chargé

4 Champ créé par un plan infini uniformément chargé

3.6 Méthode générale

Mots-clés

- **Champ électrostatique**
- **Symétries**
- **Théorème de Gauss**

3.1. Propriétés associées au caractère radial du champ électrostatique

1 Circulation du champ électrostatique

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, le champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$ créé par une charge ponctuelle étant radial, il dérive d'un potentiel $V(\vec{r})$. Cette propriété importante des champs électrostatiques $\vec{E}$ permet d'affirmer que leur circulation, définie comme l'intégrale de $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ sur tout contour fermé C (fig. 3.1) est nulle. Nous dirons que la circulation du champ électrostatique est conservative. En effet :

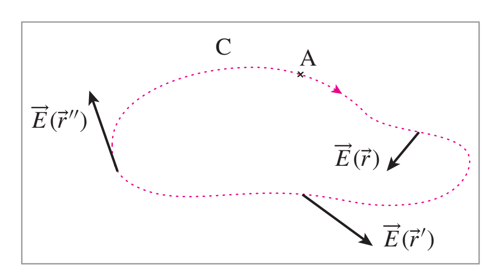


Fig. 3.1. Circulation du champ électrostatique sur un contour fermé C.

$$\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_A^A \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{A}) = 0 \tag{3.1}$$

Le cercle sur le symbole d'intégration rappelle que l'intégration doit être effectuée sur tout le contour C.

2 Rotationnel du champ électrostatique

La relation 3.1 fait intervenir la valeur du champ électrostatique en chaque point de la boucle C. Elle décrit donc une propriété non locale de ce champ. Nous allons maintenant établir une autre relation qui décrira une propriété « locale » du champ électrostatique, en ce sens que cette propriété ne dépendra que du point où l'on étudie le champ et de son voisinage immédiat. Soulignons dès à présent que cette nouvelle formulation est mathématiquement strictement équivalente à la première, toutes deux décrivant, à des échelles différentes, le caractère radial du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle.

Pour établir cette nouvelle formulation, nous utiliserons le théorème de Stockes (la démonstration de ce théorème est donnée en annexe). Selon ce théorème,

$$\oint_C \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r})\right) \cdot \mathrm{d}\vec{S} \tag{3.2}$$

Dans cette expression, $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r})$ représente symboliquement le produit vectoriel de l'opérateur $\vec{\nabla}$ et du champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$, appelé « rotationnel » du vecteur $\vec{E}$, S une surface connexe s'appuyant sur le contour C ; $\mathrm{d}\vec{S}$ est un vecteur normal à un élément infinitésimal de surface, de module $\mathrm{d}S$ et orienté de manière à ce que le trièdre

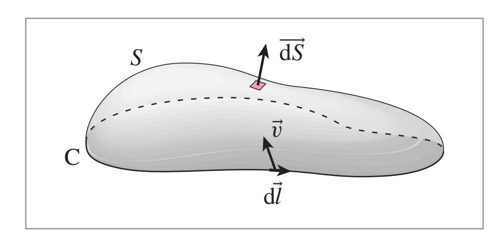


Fig. 3.2.

$(\mathrm{d}\,\vec{l}, \vec{v}, \overrightarrow{\mathrm{d}S})$ soit direct, $\vec{v}$ étant un vecteur quelconque orienté vers le centre de la boucle (fig. 3.2).

En appliquant le théorème de Stockes à l'équation 3.1, on obtient immédiatement :

$$\int_{\mathrm{S}} \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r})\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = 0 \qquad (3.3)$$

Cette relation étant vraie quels que soient le contour C parcouru, et donc la surface S bordée, on en déduit que :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(\vec{r}) = \vec{0} \qquad (3.4)$$

Nous dirons que le rotationnel du champ électrostatique $\vec{E}$ est nul. Ce résultat constitue l'expression d'une propriété locale fondamentale du champ électrostatique. Elle relie les valeurs du champ $\vec{E}$ en un point à celles qu'il prend dans un voisinage immédiat. Ce résultat est totalement lié au caractère radial du champ électrostatique : il lui est strictement équivalent. (Ce résultat n'est valable que dans le cas de l'électrostatique. Dans le cas de charges mobiles, l'expression du rotationnel du champ électrostatique est plus compliquée.)

3.2. Propriétés associées à la dépendance en $1/r^2$ de l'intensité du champ électrostatique

Après avoir étudié dans le paragraphe précédent les propriétés locales du champ électrostatique liées à son caractère radial, nous allons examiner maintenant celles associées à la variation en $1/r^2$ de l'intensité du champ électrostatique.

Nous établirons en particulier l'un des théorèmes les plus importants de l'électrostatique : le théorème de Gauss, dans ses versions non locale et locale. Ce théorème s'applique à tout champ radial dont l'intensité varie en r^{-2} (champ électrostatique et également champ gravitationnel).

1 Flux d'un champ électrostatique à travers une surface fermée

Par définition, le flux d'un champ vectoriel $\vec{C}$ à travers un élément de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ est donné par l'expression $\mathrm{d}\Phi = \vec{C} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$. Le flux du champ $\vec{C}$ à travers une surface finie S est tout naturellement donné par l'intégrale double étendue à toute la surface S de l'élément infinitésimal précédent. Appliquée au champ de vitesse d'un fluide en écoulement, cette définition recouvre bien la notion de « flux du fluide » à travers une surface, par exemple le flux de l'eau d'une rivière à travers un filet tendu (voir annexe). La notion de flux à travers une surface fermée évoque donc « quelque chose » qui « rentre » ou qui « sort ». Nous conserverons ici cette idée intuitive. Le flux d'un champ électrostatique à travers une surface fermée sera discuté en termes de lignes de champ qui pénètrent ou qui quittent cette surface fermée.

Flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle q à travers une surface

Commençons par calculer le flux d'un champ créé par une charge ponctuelle à travers une surface fermée S entourant un volume fini V. Une charge ponctuelle placée à l'origine O des espaces crée en tout point $\vec{r}$ un champ électrostatique $\vec{E}(\vec{r})$:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{u}_\mathrm{r}$$

Ce champ étant radial, les lignes de champ associées forment un faisceau de droites passant par O.

Flux à travers un élément de surface – Définition

Considérons un élément infinitésimal $\mathrm{d}S$ quelconque de la surface S, situé à la distance r de l'origine, et calculons le flux à travers cet élément de surface (fig. 3.3). Il convient d'introduire l'ensemble des lignes de champ s'appuyant sur le contour de $\mathrm{d}S$: ce « cône » de lignes de champ définit l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ sous lequel on voit l'élément de surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ depuis la charge. Par définition (voir annexe), nous avons :

$$\mathrm{d}\Omega = \vec{u}_\mathrm{r} \cdot \frac{\overrightarrow{\mathrm{d}S}}{r^2} \qquad (3.5)$$

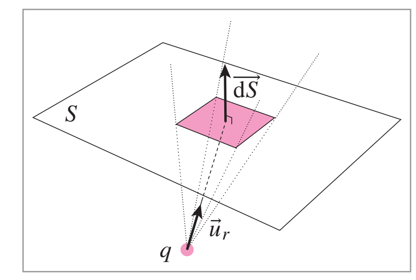


Fig. 3.3. Flux à travers un élément de surface.

$\overrightarrow{\mathrm{d}S}$ étant le vecteur sortant de S normal à la surface et de module $\mathrm{d}S$. Le flux élémentaire $\mathrm{d}\Phi$ de $\vec{E}$ à travers $\mathrm{d}S$ s'exprime simplement en fonction de l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ par :

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$

Ainsi, lorsque les lignes de champ sont perpendiculaires à la surface $\overrightarrow{\mathrm{d}S}$, le flux est maximum, tandis qu'il est nul si la surface est parallèle aux lignes de champ. Le flux mesure en quelque sorte « l'écoulement » du champ à travers la surface.

Flux à travers une surface fermée ne contenant pas la charge ponctuelle q créant le champ électrostatique

Supposons maintenant que la surface fermée S ne contienne pas la charge $q > 0$ (fig. 3.4) et calculons en nous servant du résultat précédent, le flux total à travers la surface S.

Prenons tout d'abord un cône engendré par un faisceau de lignes de champ. Ce cône intersecte la surface S et définit deux surfaces élémentaires $\mathrm{d}S_1$ et $\mathrm{d}S_2$; nous appellerons $\mathrm{d}\psi$ le volume contenu à l'intérieur de ce faisceau et de la surface S. Calculons le flux à travers le tube constitue par les surfaces $\mathrm{d}S_1$, $\mathrm{d}S_2$ et la surface latérale S_L engendrée par les lignes de champ. Par définition, le flux à travers la surface latérale $\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S_\mathrm{L}}$ est nul puisqu'en chaque point de cette surface le champ appartient à la surface. Il ne reste donc plus qu'à calculer les contributions associées à chacune des surfaces $\mathrm{d}S_1$ et $\mathrm{d}S_2$.

Conventionnellement les surfaces sont orientées de l'intérieur vers l'extérieur de la surface fermée S. En appliquant la relation 3.5 à chacune de ces surfaces, nous obtenons :

$$\mathrm{d}\Phi_1 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}S_1}\cdot\vec{u}_\mathrm{r}}{r_1^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}S_2}\cdot\vec{u}_\mathrm{r}}{r_2^2} = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$

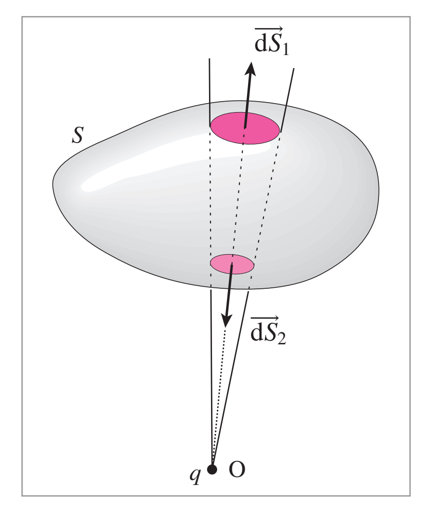


Fig. 3.4. **Flux à travers une surface fermée.**

Ces deux flux sont de même intensité mais de signe opposé le flux est « rentrant » sur la surface $\mathrm{d}S_2$ et « sortant » sur la surface $\mathrm{d}S_1$. Ainsi le flux total à travers la surface entourant le volume élémentaire $\mathrm{d}\psi$ est nul. Toute la surface fermée S peut être décomposée de cette façon. Le flux total traversant cette surface S est alors égal par construction à la somme des contributions associées à chacun des tubes intervenant dans la décomposition de S. Chaque contribution étant nulle, nous pouvons conclure que le flux total du champ électrostatique créé par une charge, à travers une surface fermée ne la contenant pas, est nul.

Flux à travers une surface fermée contenant la charge ponctuelle q créant le champ électrostatique

Considérons maintenant une surface fermée qui enveloppe la charge q. Chaque faisceau de lignes de champ issu de la charge q intersecte alors la surface S en définissant une seule surface élémentaire $\mathrm{d}S$ (fig. 3.5).

Calculons le flux à travers la surface fermée constituée par la surface latérale du cône et la surface $\mathrm{d}S$. Comme dans le cas précédent, le flux à travers la surface latérale est nul par construction. Le flux est simplement égal à celui du champ à travers la surface $\mathrm{d}S$ qui a pour expression :

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\mathrm{d}\Omega$$

Fig. 3.5.

Le flux total à travers la surface S est la somme des contributions apportées par chaque élément d'angle solide $\mathrm{d}\Omega$, quelle que soit sa forme ; l'angle solide correspondant à toute la surface S est égal à 4π. Ainsi le flux du champ électrostatique créé par une charge ponctuelle à travers une surface fermée la contenant est exactement égal à :

$$\Phi = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{3.6}$$

2 Théorème de Gauss

Nous avons évalué pour l'instant le flux du champ électrostatique créé par une seule charge ponctuelle. Nous pouvons en déduire le flux d'un champ électrostatique créé par une distribution quelconque de charges à travers une surface fermée, en appliquant le principe de superposition. En effet, chaque charge q_i dans le cas d'une distribution discrète ou chaque élément de charge $\mathrm{d}q$ dans celui d'une distribution continue, crée un champ électrostatique dont le flux contribuera au flux total à travers une surface fermée. Si la charge q_i ou l'élément de charge $\mathrm{d}q$ est extérieur à la surface S, la contribution élémentaire correspondante sera nulle ; dans le cas contraire, elle sera respectivement égale à q_i/ε_0 ou $\mathrm{d}q/\varepsilon_0$.

Théorème : **Le flux total du champ électrostatique créé par la distribution continue à travers une surface fermée est égal au produit par $1/\varepsilon_0$ de la somme algébrique Q_{int}, des charges contenues dans la surface. Nous pouvons écrire :**

$$\iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} \tag{3.7}$$

Ce résultat fondamental de l'électrostatique est appelé « théorème de Gauss ».

Un peu d'histoire

Théorème de Gauss

En 1840, Gauss publie « Théorèmes généraux sur les forces d'attraction et de répulsion agissant en raison inverse du carré des distances », ouvrage dans lequel il énonce son célèbre théorème.

3 Expression locale du théorème de Gauss. Divergence du champ électrostatique

L'expression 3.7 qui nécessite la connaissance du champ électrostatique en tout point de la surface fermée, caractérise donc une propriété non locale du champ. Toutefois, nous allons voir maintenant que cette propriété a son équivalent à l'échelle locale. Pour établir cette nouvelle formulation du théorème de Gauss, nous appliquerons à la relation 3.7 le théorème de Green-Ostrogradsky. Selon ce théorème démontré en annexe, on a :

$$\iint_S \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\,\mathrm{d}\tau \tag{3.8}$$

Dans cette expression V est le volume contenu dans la surface fermée S et $\mathrm{d}\tau$ un élément infinitésimal de ce volume.

Un peu d'histoire

Théorème de Green

Green démontre en 1826 son théorème et le présente dans un ouvrage intitulé « *Essay on the Application of Mathematical Analysis to The Theory of Electricity and Magnetism* ». Il restera inconnu de la quasi-totalité des savants de l'époque, en particulier ceux de l'école française, jusqu'à ce que W. Thomson, lord Kelvin, le popularise lors d'une visite à Paris en 1845 et fasse rééditer l'ouvrage de Green en 1850.

Si nous introduisons le résultat obtenu par le théorème de Green-Ostrogradsky dans l'expression 3.7, nous obtenons par identification :

$$\iiint_V (\vec{\nabla} \cdot \vec{E})\, \mathrm{d}\tau = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \iiint_V \rho\, \mathrm{d}\tau$$

Ce résultat est valable quels que soient la surface S et le volume V qu'elle enveloppe. On peut donc en déduire la relation :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0} \tag{3.9}$$

Ce résultat correspond à la formulation locale du théorème de Gauss. En chaque point de l'espace, la divergence $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(\vec{r})$ du champ électrostatique ne dépend que de la densité de charge en ce même point.

La démonstration que nous venons de faire, basée sur la forme de la force Coulomb, pouvait laisser croire que le théorème de Gauss dans sa forme locale n'est valable que pour des charges statiques. Il n'en est rien. Il est plus général que la force de Coulomb et s'applique également à des distributions de charges variant au cours du temps. En fait ce résultat constitue même l'une des équations fondamentales de l'électromagnétisme.

3.3. Propriétés de symétrie du champ électrostatique

En 1894, P. Curie énonça un principe universel vérifié par tous les phénomènes physiques : « Lorsque certaines causes produisent certains effets, les éléments de symétrie des causes doivent se retrouver dans les effets produits. La réciproque n'est pas vraie, c'est-à-dire que les effets produits peuvent être plus symétriques que les causes ».

Ce principe s'applique bien évidemment à l'électrostatique. Lorsqu'une distribution de charges électrostatiques présente « certaines symétries », les orientations et modules du champ électrostatique qu'elles créent en tous points de l'espace présentent également des symétries. Dans ce paragraphe, nous ne ferons pas une étude détaillée et systématique des propriétés de symétrie du champ électrostatique créé par une distribution symétrique de charges ; nous nous contenterons de montrer sur quelques exemples comment ces symétries imposent l'orientation du champ électrostatique $\vec{E}$ et déterminent le nombre de variables nécessaires à la description des variations de $\vec{E}$.

1 Symétries et variables pertinentes

Étudions tout d'abord le lien existant entre le nombre de variables nécessaires pour décrire les variations spatiales des composantes de $\vec{E}$ et les éléments de symétrie de la distribution de charges.

Prenons par exemple une distribution infinie de charges réparties uniformément sur une droite confondue avec l'axe Oz. Quel que soit le point M, son environnement électrostatique (l'intensité des charges et leurs positions relatives) restera le même si on translate le point M parallèlement à Oz. Nous dirons que cette distribution est invariante par translation le long de Oz. Les composantes du champ électrostatique $\vec{E}$(M) ne peuvent donc pas dépendre de la variable z. Notons que ce résultat serait faux si la distribution de charge était non uniforme, toute translation du point M le long de Oz introduisant alors une modification du « paysage » électrostatique. De même l'invariance par rotation autour de l'axe Oz permet de conclure que, en coordonnées cylindriques, les composantes de $\vec{E}$ ne dépendront pas non plus de l'angle θ. Ainsi le module du champ électrostatique créé par cette distribution de charges ne pourra varier qu'avec la distance r à l'axe Oz. En utilisant le même type d'arguments, on pourra se convaincre sans difficulté que le champ électrostatique créé en un point M par un plan infini uniformément chargé ne pourra dépendre éventuellement que de la distance du point M au plan.

Ainsi, en étudiant les invariances par translation et rotation des distributions de charges, nous pouvons limiter le nombre des variables dont dépendent les différentes composantes du champ électrostatique.

2 Symétries et orientations du champ électrostatique

Examinons maintenant les arguments permettant de déterminer les symétries du champ électrostatique et les points de l'espace pour lesquels ce champ est nul. Au préalable, il convient de définir ce que nous appellerons les plans de symétrie et d'antisymétrie électrostatiques.

Plans de symétrie électrostatique

Considérons par exemple l'ensemble de deux charges électrostatiques identiques présenté sur la figure 3.6. Dans ce cas, le plan médian P_1 est qualifié de « plan de symétrie électrostatique ». En effet, par rapport au plan P_1, les points A et B sont géométriquement symétriques mais également électrostatiquement symétriques puisque, par hypothèse, la charge en A est égale à la charge en B. Que pouvons-nous alors conclure sur les orientations relatives des champs électrostatiques créés par ces deux charges aux points M et M′ symétriques l'un de l'autre par rapport au plan P_1 ? Le champ électrostatique au point M peut toujours se décomposer sous la forme :

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = \vec{E}_{\perp}(\mathrm{M}) + \vec{E}_{\parallel}(\mathrm{M})$$

$\vec{E}_{\perp}(\mathrm{M})$ et $\vec{E}_{\parallel}(\mathrm{M})$ étant respectivement les composantes du champ électrostatique perpendiculaire et parallèle au plan P_1. Par analogie, le champ électrostatique au point M′ se décompose de la même manière :

$$\vec{E}(\mathrm{M}') = \vec{E}_{\perp}(\mathrm{M}') + \vec{E}_{\parallel}(\mathrm{M}')$$

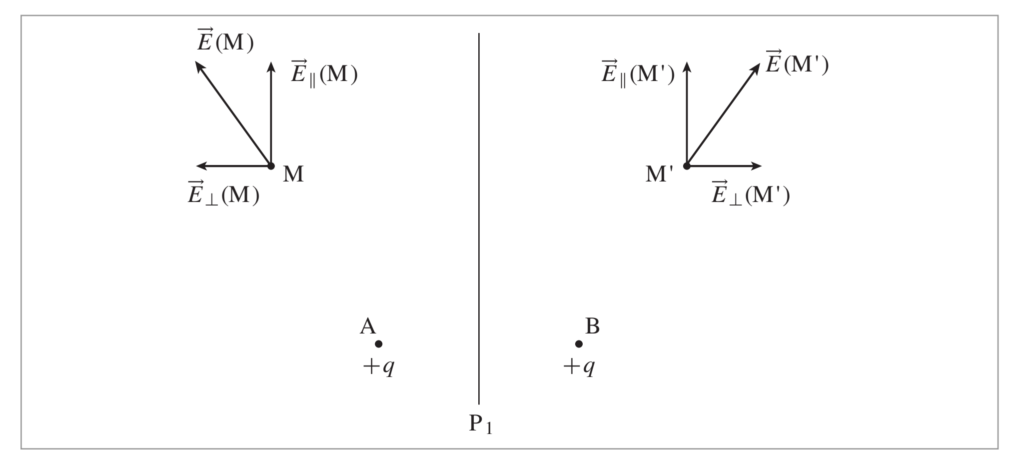


Fig. 3.6. Composantes normale et tangentielle du champ électrostatique par rapport au plan de symétrie P_1.

Comme nous le constatons sur la figure 3.6, nous avons la relation :

$$\vec{E}_{\parallel}(\mathrm{M}) = \vec{E}_{\parallel}(\mathrm{M}') \quad \vec{E}_{\perp}(\mathrm{M}) = -\vec{E}_{\perp}(\mathrm{M}') \tag{3.10}$$

Ce résultat se généralise à toute distribution de charges ayant un plan de symétrie électrostatique. De plus, si le point M appartient au plan de symétrie P_1, M est confondu avec son symétrique M′ et en appliquant les relations 3.10 nous pouvons conclure que :

$$\text{si } \mathrm{M} \in \mathrm{P}_1, \quad \vec{E}_{\perp}(\mathrm{M}) = -\vec{E}_{\perp}(\mathrm{M}' = \mathrm{M}) = 0 \tag{3.11}$$

et que le champ électrostatique appartient nécessairement au plan de symétrie.

Plan d'antisymétrie électrostatique

Examinons maintenant le système constitué non plus par deux charges identiques mais par deux charges de signes opposés (fig. 3.7). Dans ce cas, P_1 est toujours un plan de symétrie géométrique mais en revanche ce n'est plus un plan de symétrie électrostatique : la charge q se transforme en une charge $-q$. On dit alors que le plan P_1 est un plan « d'antisymétrie » électrostatique. Que peut-on dire alors des champs électrostatiques en M et M′ ? Si nous effectuons la même construction que celle effectuée dans le cas précèdent, nous obtenons :

$$\vec{E}_{\parallel}(\mathrm{M}) = -\vec{E}_{\parallel}(\mathrm{M}') \quad \vec{E}_{\perp}(\mathrm{M}) = \vec{E}_{\perp}(\mathrm{M}') \tag{3.12}$$

Ces résultats se généralisent bien entendu à tout plan d'antisymétrie. De plus, si le point M appartient au plan P_1, il est son propre symétrique ; l'application des relations 3.12 conduit à :

$$\vec{E}_{\parallel}(\mathrm{M}) = -\vec{E}_{\parallel}(\mathrm{M}' = \mathrm{M}) = \vec{0} \tag{3.13}$$

Nous pouvons donc conclure que le champ électrostatique en un point appartenant à un plan d'antisymétrie est nécessairement perpendiculaire à ce plan.

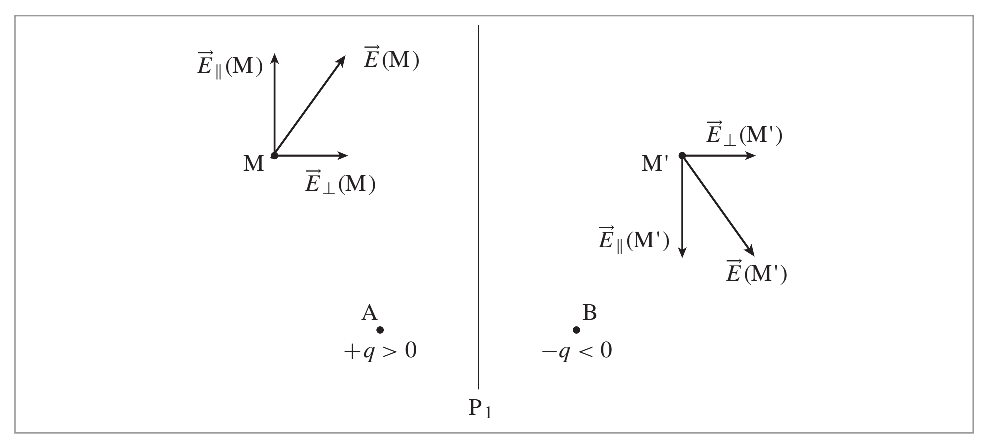


Fig. 3.7. Composantes normale et tangentielle du champ électrostatique par rapport au plan d'antisymétrie P_1.

3.4. Exemple d'utilisation des propriétés du champ électrostatique

Nous avons vu aux paragraphes 3.2 et 3.3 que les phénomènes électrostatiques sont décrits par deux lois : la circulation du champ électrostatique est nulle et son flux à travers une surface fermée est proportionnel aux charges contenues à l'intérieur de cette surface. Nous allons dans ce paragraphe exploiter ces résultats pour déterminer les variations du champ électrostatique lorsqu'on traverse une surface chargée séparant deux milieux distincts.

Supposons donc une surface S uniformément chargée, de densité surfacique σ, séparant deux régions indicées respectivement 1 et 2. Le champ électrostatique pourra être décomposé en une composante tangentielle E_t et une composante normale E_n respectivement parallèle et perpendiculaire à la surface S.

1 Continuité de la composante tangentielle du champ électrostatique

Considérons le contour C présenté sur la figure 3.8. Il est formé de deux segments de longueur finie (ab) et (cd) situés de part et d'autre de la surface, très près de celle-ci et de deux autres segments (ad) et (bc) pouvant être rendus aussi petits que l'on veut. En vertu de la relation 3.1 la circulation le long de ce contour fermé est nulle :

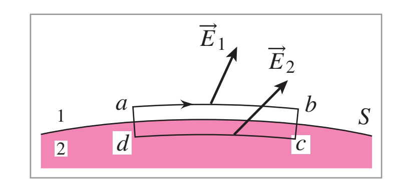


Fig. 3.8.

$$\oint_C \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \int_\mathrm{a}^{b} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \int_\mathrm{b}^{c} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \int_\mathrm{c}^{d} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \int_\mathrm{d}^{a} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = 0$$

Les longueurs des segments (ad) et (bc) étant aussi petites que l'on veut, les contributions de ces segments tendent vers 0. Sur les trajets (ab) et (cd), de même longueur mais parcourus en sens inverse, seule la composante tangentielle E_t du champ contribue à la circulation :

$$\int_a^b E_t(1)\,\mathrm{d}l + \int_b^a E_t(2)\,\mathrm{d}l = \int_a^b \left[E_t(1) - E_t(2)\right]\mathrm{d}l = 0$$

Cette équation devant être vérifiée quel que soit le contour C choisi, nous pouvons en déduire que la composante tangentielle du champ électrostatique est continue à la traversée d'une surface chargée :

$$E_t(1) = E_t(2) \tag{3.14}$$

2 Discontinuité de la composante normale du champ

Il ne reste plus qu'à étudier la variation de la composante normale du champ électrostatique. Considérons maintenant la surface enveloppe d'un cylindre plat dont les faces parallèles sont situées de part et d'autre de la surface, plane chargée (fig. 3.9).

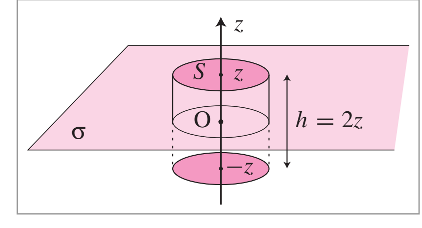


Fig. 3.9.

Calculons le flux de $\vec{E}$ à travers cette surface S. La hauteur du cylindre pouvant être arbitrairement petite, le flux à travers la surface latérale être rendu aussi petit que l'on veut et tendra vers 0 avec la hauteur. Les seules contributions au flux proviennent donc des surfaces du cylindre parallèles à la surface chargée. En appliquant le théorème de Gauss, nous obtenons immédiatement :

$$\iint_{S_1} E_n(1)\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} + \iint_{S_2} E_n(2)\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$$\iint_{S_1} \left(E_n(1) - E_n(2)\right)\mathrm{d}S = \frac{1}{\varepsilon_0}\iint_{S_2} \sigma\,\mathrm{d}S$$

Cette équation devant être vérifiée pour toute surface S, nous pouvons en conclure que :

$$E_n(1) - E_n(2) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{3.15}$$

Ainsi, à la traversée de la surface chargée, la composante normale du champ subit une discontinuité, proportionnelle à la densité surfacique de charges.

3.5. Calcul du champ électrostatique créé par des distributions de charges de symétrie élevée

Pour calculer le champ électrostatique créé par une distribution de charges, nous disposons pour l'instant de deux méthodes : l'une est directe et utilise les définitions du chapitre 2, l'autre est indirecte et consiste à calculer au préalable le potentiel $V(\vec{r})$ puis à utiliser la relation $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla}V(\vec{r})$. Dans ce paragraphe, nous présentons une troisième technique de calcul de $\vec{E}(\vec{r})$ s'appuyant sur le théorème de Gauss, méthode qu'il sera commode d'utiliser dans le cas de distributions de charges présentant un degré de symétrie élevé.

1 Principe de la méthode

Pour calculer le champ électrostatique créé au point P par une distribution en utilisant le théorème de Gauss, il nous faut :

(1) construire une surface fermée fictive S_G passant par P (appelée surface de Gauss) ;

(2) être capable de calculer en tout point de cette surface le produit scalaire $\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_G$;

(3) pouvoir faire la somme de toutes ces contributions sur toute la surface S_G ;

(4) en extraire la valeur particulière du champ $\vec{E}$ au point P.

Ce programme n'est en général réalisable que si la symétrie de la distribution de charges permet de simplifier le problème. Examinons sur trois exemples comment ces difficultés disparaissent dans le cas d'une distribution de symétrie élevée.

2 Calcul du champ électrostatique créé par une distribution à symétrie sphérique chargée uniformément

Considérons une distribution de charges de densité ρ réparties uniformément à l'intérieur d'une coquille sphérique de centre O et de rayons extérieur et intérieur R et R' (fig. 3.10). Nous nous proposons de calculer le champ électrostatique créé par cette distribution au point P situé à la distance r de l'origine.

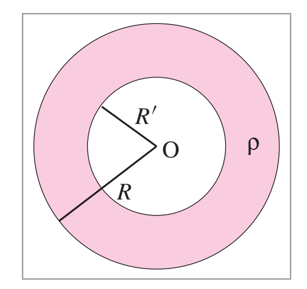


Fig. 3.10. Coquille sphérique uniformément chargée.

La symétrie sphérique de la distribution nous suggère d'utiliser les coordonnées sphériques (r, θ, φ) (voir annexe). Par symétrie, toutes les directions de l'espace sont équivalentes ; en utilisant les arguments présentés au paragraphe 3.3, nous dirons que tout plan passant par P et O est un plan de symétrie électrostatique. Le champ électrostatique devant alors appartenir à l'intersection de tous ces plans de symétrie, il ne peut être que radial :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, \varphi)\,\vec{u}_r$$

Par ailleurs, la distribution de charge est invariante par rotation d'angles θ et φ. Le module du champ doit donc être indépendant de θ et φ :

$$\vec{E} = E_r(r)\,\vec{u}_r$$

Le module du champ électrostatique est le même en tout point d'une sphère de rayon r. De plus, pour tout élément infinitésimal de surface $\mathrm{d}S$,

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = E_r(r)\,\mathrm{d}S$$

puisque le champ est radial et que $\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \mathrm{d}S\,\vec{u}_r$ par définition. Pour calculer le champ à la distance r du centre, nous pourrons donc prendre pour surface de Gauss S_G, une sphère fictive de centre O et de rayon r. En appliquant maintenant le théorème de Gauss à cette surface S_G, nous obtenons alors :

$$\Phi = \iint_{S_G} \vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{S_G} E_r(r)\,\vec{u}_r \cdot \mathrm{d}S\,\vec{u}_r = \iint_{S_G} E_r(r)\,\mathrm{d}S$$

$$\Phi = E_r(r) \iint_{S_G} \mathrm{d}S = 4\pi r^2 E_r(r) = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$

$$E_r(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_{int}}{r^2} \tag{3.16}$$

Remarquons que pour établir cette dernière relation, nous n'avons utilisé que des arguments de symétrie. Elle n'est donc liée qu'à la symétrie de la distribution de charges, indépendamment du détail de cette distribution ; elle peut s'appliquer aussi bien à une coquille sphérique chargée uniformément qu'à une sphère chargée en surface ou en volume.

Pour finir de calculer le champ électrostatique en tout point de l'espace, il ne reste plus qu'à évaluer suivant les différents cas, la charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss correspondante.

Si nous voulons calculer le champ électrostatique en un point P extérieur à la coquille chargée, la charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss Q_{int} sera exactement la charge totale contenue dans la coquille puisque la surface de Gauss l'enveloppe totalement (fig. 3.11.a). Ainsi pour $r > R$, nous obtenons :

$$Q_{int} = \frac{4\pi\rho(R^3 - R'^3)}{3} \quad \text{et} \quad E_r(r) = \frac{\rho(R^3 - R'^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Remarquons au passage que ces résultats montrent qu'à l'extérieur de la coquille, le champ électrostatique est égal à celui que nous aurions obtenu si toute la charge était concentrée au centre O de la distribution. Nous pourrions faire la même constatation quelle que soit la distribution de charges pourvue qu'elle soit de symétrie sphérique. Ce résultat a statut de théorème.

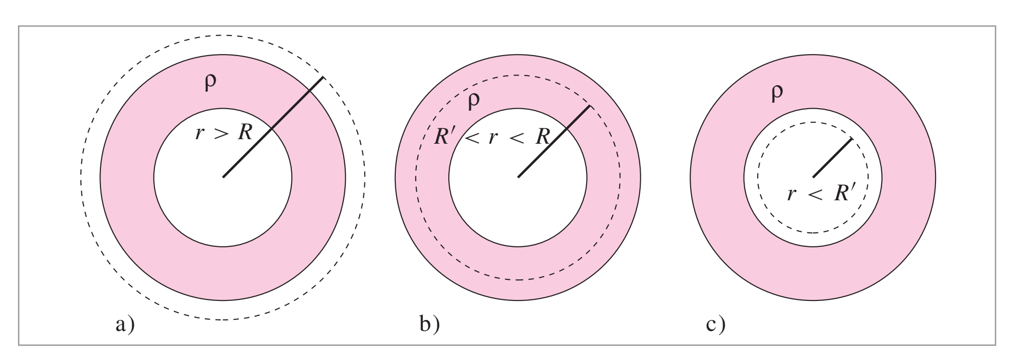


Fig. 3.11. Surfaces de Gauss **permettant de calculer le champ électrostatique : a) à l'extérieur de la coquille ; b) à l'intérieur de la coquille ; c) dans la cavité.**

Pour calculer le champ électrostatique à l'intérieur de la coquille, il convient de prendre une sphère de Gauss de rayon r tel que $R' < r < R$ (fig. 3.11.b). La charge Q_{int} n'est plus égale à la charge totale, nous avons :

$$Q_{\text{int}}(r) = \frac{4\pi\rho(r^3 - R'^3)}{3}$$

$$E_{\text{r}}(r) = \frac{\rho(r^3 - R'^3)}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Enfin, à l'intérieur de la cavité, $r < R'$, il n'y a aucune charge à l'intérieur de la surface de Gauss correspondante (fig. 3.11.c), le champ $E_{\text{r}}(r)$ y est donc nul. Les variations du module $E_{\text{r}}(r)$ sont présentées sur la figure 3.12.

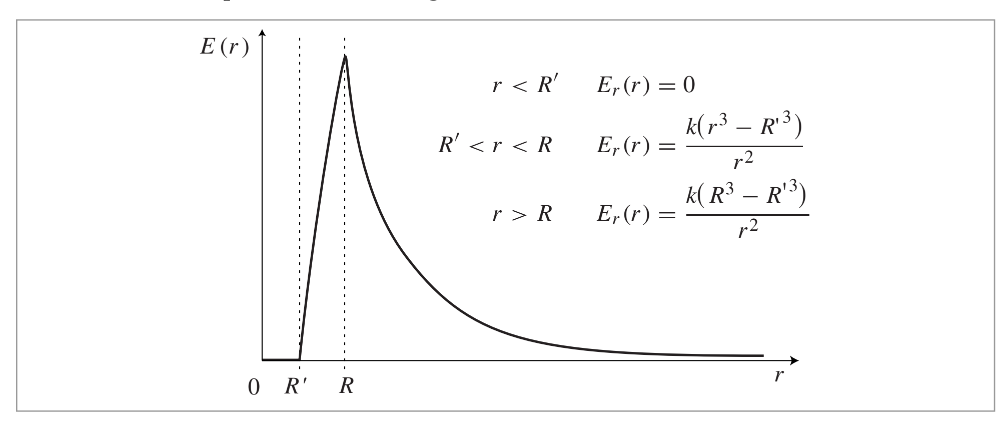


Fig. 3.12. Variation du module du champ électrostatique **en fonction de la distance au centre de la coquille.**

Remarquons pour conclure que nous aurions pu également obtenir ces résultats en considérant cette coquille uniformément chargée comme la superposition d'une distribution volumique sphérique uniforme ρ de rayon R et d'une distribution sphérique uniforme $-\rho$ de rayon R'.

3 Calcul du champ créé par un fil cylindrique infini uniformément chargé

Supposons un fil infini uniformément chargé avec une densité linéique de charge λ (fig. 3.13) La symétrie de la distribution nous suggère d'employer les coordonnées cylindriques (r, θ, z), l'axe z étant confondu avec le fil.

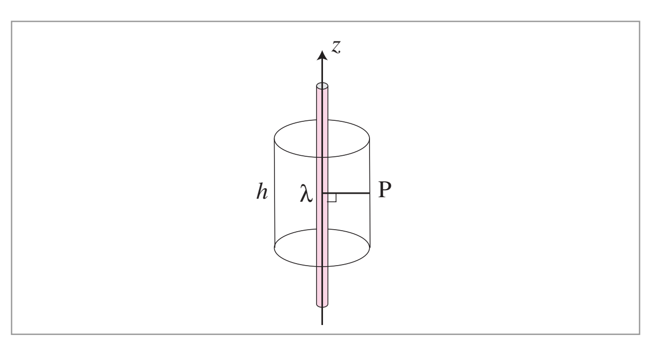


Fig. 3.13. Surface de Gauss **permettant de calculer le champ électrostatique créé par un fil infini uniformément chargé.**

Pour calculer le champ électrostatique en un point P situé à la distance r du fil, commençons par étudier sa symétrie. Le fil étant infini, tout plan perpendiculaire au fil passant par P est un plan de symétrie électrostatique qui contient le champ créé par les charges réparties sur le fil. De plus, tout plan passant par P contenant le fil est également un plan de symétrie auquel ce champ doit appartenir. La direction du champ électrostatique est donc l'intersection de ces deux plans, le champ est radial :

$$\vec{E} = E_r(r, \theta, z)\vec{u}_r$$

Par ailleurs, la distribution est invariante par translation le long de l'axe z (le fil est infini) et par rotation autour de z. Le champ électrostatique doit donc être indépendant de θ et z :

$$\vec{E} = E_r(r)\vec{u}_r$$

Il est alors commode de prendre pour surface de Gauss, l'enveloppe d'un cylindre d'axe parallèle au fil, de rayon r et de hauteur quelconque h. Sur les bases du cylindre, $\vec{E}$ est perpendiculaire à $\mathrm{d}\vec{S}$: le flux à travers ces surfaces est donc nul ; en revanche en chaque point de la surface latérale S_L, du cylindre, $\vec{E}$ est perpendiculaire à la surface. Nous obtenons ainsi :

$$\Phi = \iint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}_L = \iint_S E_r(r)\,\mathrm{d}S_L$$

$$\Phi = 2\pi r h E_r(r)$$

Le théorème de Gauss nous permet alors d'écrire :

$$E_r(r) = \frac{Q_{int}}{2\pi\varepsilon_0 r h}$$

Notons que ce résultat intermédiaire ne dépend que de la symétrie de la distribution de charges. La charge contenue à l'intérieur de la surface de Gauss est égale à la longueur du fil multipliée par la densité linéique :

$$Q_{int} = \lambda h$$

L'application du théorème de Gauss nous donne finalement l'expression du module du champ électrostatique :

$$E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

Cette expression ne dépend pas bien évidemment de la hauteur h qui était totalement arbitraire. Elle est, comme il se doit, dimensionnellement homogène à un champ électrostatique puisque λ est une charge par unité de longueur. Nous retrouvons ici simplement le résultat que nous avions déjà obtenu au chapitre 2 par un calcul plus compliqué mais plus général qui pouvait s'appliquer également au cas d'un fil de dimensions finies. Un fil n'étant jamais de diamètre nul, cette expression n'a pas de sens pour $r = 0$.

4 Champ créé par un plan infini uniformément chargé

Considérons maintenant un plan infini uniformément chargé de densité surfacique σ (fig. 3.14). La symétrie de la distribution nous autorise à utiliser les coordonnées cylindriques, l'axe perpendiculaire au plan étant considéré comme l'axe des z (nous aurions pu également prendre les coordonnées cartésiennes).

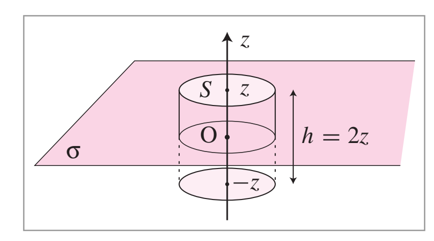


Fig. 3.14. Surface de Gauss **permettant de calculer le champ électrostatique crée par un plan infini uniformément chargé.**

Nous nous proposons de calculer le champ électrostatique créé par cette distribution en un point P situé à la distance z de ce plan. Examinons l'orientation du champ électrostatique créé par ce plan chargé. Tout plan passant par P et perpendiculaire au plan chargé est un plan de symétrie électrostatique. Pour pouvoir appartenir à tous ces plans de symétrie, la direction du champ électrostatique doit nécessairement être la droite perpendiculaire au plan chargé passant par P. Ainsi le champ électrostatique n'a de composante que suivant z :

$$\vec{E} = E_z(r, \theta, z)\vec{u}_z$$

Le plan étant infini, la distribution de charges est invariante par translation parallèlement au plan et le module du champ électrostatique ne peut dépendre que de la distance au plan :

$$\vec{E} = E_z(z)\vec{u}_z$$

De plus, le plan chargé étant lui-même plan de symétrie, nous avons :

$$E_z(-z) = -E_z(z)$$

Les surfaces correspondant à la même valeur du module du champ sont des surfaces symétriques et parallèles au plan. Nous pourrons prendre pour surface de Gauss, un cylindre de section S, de hauteur $2z$ placé symétriquement de part et d'autre du plan chargé. Le flux sortant par la face latérale est nul, le flux à travers la surface de Gauss S_G provient donc des seules contributions des surfaces de base. Nous avons donc :

$$\Phi = 2E_z(z)S$$

La charge intérieure contenue dans la surface de Gauss est simplement égale à σS.

En appliquant le théorème de Gauss, nous obtenons l'expression du module du champ au point P :

$$E_z(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

Ainsi, le champ électrostatique créé par un plan uniformément chargé est indépendant de la distance au plan (nous aurions pu anticiper ce résultat en constatant que si la symétrie impose au champ de ne dépendre que de z, la condition $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ entraîne $E_z(z) = \text{Cte}$). Remarque : on retrouve les propriétés démontrées en 3.4.2 sur la continuité des composantes de $\vec{E}$.

3.6. Méthode générale

Au regard de ces trois exemples, nous pouvons dégager une procédure générale permettant de calculer le champ électrostatique créé par une distribution de charge présentant un degré élevé de symétrie.

Dans un premier temps, il convient d'exploiter des arguments de symétrie pour déterminer l'orientation du champ électrostatique (détermination des composantes non nulles) et réduire le nombre de variables nécessaires à la caractérisation des composantes restantes. C'est ainsi que nous avons montré que le champ était radial dans le cas de la coquille sphérique, radial dans le cas du fil infini...

Cette première opération terminée, et seulement alors, nous pouvons envisager de définir une surface de Gauss nous permettant de calculer le champ électrostatique en un point P quelconque. Pour construire cette surface, nous nous imposerons plusieurs contraintes. Tout d'abord cette surface fermée devra passer par P puisque nous voulons calculer le champ en P. Ensuite, nous construirons cette surface à partir d'éléments de surface $\mathrm{d}S$ tels que le champ $\vec{E}$ leur soit parallèle ou perpendiculaire, c'est-à-dire que les contributions $\vec{E} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}S}$ soient nulles (type 1) ou simplement égales à $E\,\mathrm{d}S$ (type 2). Par exemple dans le cas du plan infini, les surfaces perpendiculaires au plan sont de type 1 tandis que les surfaces parallèles sont de type 2. Parmi les surfaces de type 2 nous sélectionnerons celles sur lesquelles le champ électrostatique est le même que celui en P. La surface de Gauss est alors construite en ne considérant que ces surfaces de type 2 complétées par des surface de type 1 pour obtenir une surface de Gauss fermée. C'est ainsi que nous avons construit dans le cas du plan infini, une surface de Gauss cylindrique, constituée de deux bases (type 2) et d'une surface latérale (type 1).

Cette surface de Gauss convenablement construite, nous pouvons appliquer enfin le théorème de Gauss pour évaluer le module du champ en P.

Exercices

1 **a.** Soit une charge ponctuelle $+q$ placée au centre O d'une sphère de rayon R. Calculer le flux du vecteur champ électrostatique créé par q à travers cette sphère.

b. Soit une distribution à symétrie sphérique non homogène centrée sur O telle que le champ électrostatique qu'elle crée varie en $\frac{1}{r^3}$. Calculer le flux de ce champ à travers la sphère de rayon R.

2 Une charge ponctuelle $+q$ est placée au centre d'un cube.

a. Quel est le flux du champ à travers une face du cube ?

b. Que vaut ce flux si la charge q est placée sur l'un des sommets du cube.

3 Soit le champ de vecteur radial $\vec{A} = \frac{\vec{u}_r}{r}$.

a. Calculer le flux de $\vec{A}$ à travers la sphère S de rayon R en utilisant l'expression

$$\Phi = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{A} \, \mathrm{d}\tau$$

b. Vérifier ce résultat par le calcul direct du flux à travers S.

Indice. *En coordonnées sphériques la divergence s'écrit*

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta} \left(\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \sin\theta A_r) + \frac{\partial}{\partial\theta}(r \sin\theta A_\theta) + \frac{\partial}{\partial\varphi}(r A_\varphi) \right)$$

4 Soit $\vec{E}(\vec{r})$ le champ créé en tout point $\vec{r}$ de l'espace par deux distributions de charge σ_1 et σ_2 réparties uniformément sur les surfaces de deux isolants plans infinis parallèles, distants de d.

a. Calculer $\vec{E}$ si :

– $\sigma_1 = +\sigma = -\sigma_2$,

– $\sigma_1 = \sigma_2 = +\sigma$.

b. Que se passe-t-il si on écarte les deux plans ?

Indice. *Utiliser le théorème de superposition.*

5 Soient deux plans infinis chargés superficiellement, de densités de charge respectives $\sigma_1 = 2 \cdot 10^{-1}$ C/m^2 et $\sigma^2 = 1,54 \cdot 10^{-5}$ C/m^2.

a. Décrire et calculer le module du champ électrostatique créé par ce système de charges si les deux plans sont parallèles.

b. Décrire le champ résultant et calculer son module dans les quatre régions de l'espace délimitées par ces deux plans s'ils sont perpendiculaires. Quels sont les éléments de symétrie des lignes de champ ?

6 Donner les éléments de symétrie d'une distribution uniforme de densité ρ, limitée par deux plans parallèles infinis espacés de d.

a. Tracer la courbe donnant le module du champ électrostatique dû à ces charges dans tout l'espace en fonction de la distance x au plan médian de la distribution.

b. Que se passe-t-il si on accole un plan infini chargé avec une densité surfacique σ sur l'une des faces de cette distribution ? Calculer le nouveau module du champ dans tout l'espace.

7 Montrer que deux distributions sphériques homogènes, de même rayon R, de densités volumiques $+\rho$ et $-\rho$ dont les centres O_1 et O_2 sont légèrement décalées de a, constituent approximativement une couche sphérique de rayon R chargée en surface avec une densité superficielle de charge $\sigma = \rho a \cos\theta$ où θ est l'angle entre la droite O_1O_2 et celle joignant un point M de la couche superficielle au milieu O de O_1O_2.

Indice. *On utilisera le fait que* $\mathrm{d}q = \rho\,\mathrm{d}\tau = \sigma\,\mathrm{d}s$.

8 Deux distributions volumiques homogènes de charges $\rho_A > 0$ et $\rho_B < 0$, limitées chacune par deux plans parallèles infinis espacés de d_A et d_B, sont juxtaposées et telles que

$$\rho_A d_A + \rho_B d_B = 0$$

a. Calculer et représenter le champ électrostatique en tout point de l'espace.

b. Calculer la différence de potentiel $V_B - V_A$ entre les deux plans extrêmes.

9 **a.** Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(r)$ en tout point de l'espace à l'intérieur et à l'extérieur du cylindre de rayon a, d'axe Oz, de longueur infinie, chargé uniformément en volume avec la densité volumique ρ. En déduire le potentiel $V(r)$ en tout point en choisissant comme potentiel de référence, la valeur $V(a) = 0$.

b. Que deviennent $\vec{E}(r)$ et $V(r)$ si on approche une seconde distribution cylindrique d'axe parallèle O'z, de même rayon a et de longueur infinie, mais chargée uniformément en volume avec la densité volumique $-\rho$?

10 **a.** Calculer le champ électrostatique $E(r)$ crée au point M situé à la distance r d'un point origine O par une distribution de charges électrostatiques si le potentiel en M est $V(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-r/a}}{r}$ (potentiel de Yukawa). Que devient ce champ en $r = 0$? Trouver le module de $E(r)$ si $r = 1$ Å.

b. Calculer le flux de ce champ à travers une sphère de centre O et de rayon R. Que devient ce flux en $R \to 0$ et $R \to \infty$?

Chapitre 4

Équations de Laplace et de Poisson

Nous allons dans ce chapitre présenter une nouvelle formulation des lois de l'électrostatique construite autour des propriétés locales du potentiel électrostatique. Cette formulation est très utile. Elle permet en particulier de contourner les difficultés rencontrées parfois lors de la manipulation de grandeurs vectorielles, le potentiel étant, lui, une grandeur scalaire.

4.1 Équations de Poisson et de Laplace

1 Équation locale du potentiel

2 Existence et unicité de la solution de l'équation locale du potentiel

4.2 Exemple d'utilisation de l'équation locale

1 Calcul du potentiel et du champ créés par une sphère chargée uniformément en volume

2 Calcul du champ électrostatique au voisinage de l'axe de révolution d'un disque chargé

3 Longueur d'écrantage - Longueur de Debye

Complément : Théorème de la valeur moyenne sur une sphère

Mots-clés

- **Potentiel électrostatique**
- **Équation de Laplace**
- **Équation de Poisson**

Dans ce chapitre, nous allons développer une nouvelle description de l'électrostatique liée aux propriétés locales du potentiel électrostatique $V(\vec{r})$. Que savons-nous pour le moment du potentiel électrostatique créé par une distribution de charges ? Dans le chapitre 2, nous l'avons défini en l'associant au travail des forces électrostatiques exercées sur une charge q par une distribution de charges : l'énergie potentielle $qV(\vec{r})$ est le travail devant être échangé avec la charge q pour l'amener de l'infini au point $\vec{r}$, le potentiel à l'infini étant pris comme origine des potentiels. C'est ainsi que nous avons obtenu la relation 2.18 décrivant le potentiel créé au point $\vec{r}$ par une distribution de charges caractérisée par la densité de charges $\rho(\vec{r})$:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \, \mathrm{d}\tau + K$$

Par ailleurs, nous avons vu dans le chapitre précédent que si ces distributions de charges sont symétriques, il était commode de déduire le potentiel du champ électrostatique calculé à l'aide du théorème de Gauss en utilisant la relation :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

Dans ces deux cas, la distribution de charges était connue au préalable en tout point de l'espace. On peut toutefois rencontrer d'autres situations pour lesquelles la distribution de charges n'est pas connue par avance, mais où seules les valeurs du potentiel en certains points de l'espace sont données. Il convient alors de formuler les lois de l'électrostatique uniquement en termes de potentiels.

Un peu d´histoire

Équation de Poisson

En 1813, Poisson généralisa l'équation de Laplace à des régions de l'espace contenant des charges réparties avec une densité ρ. En particulier, il put ainsi montrer, en supposant que l'ensemble des forces électrostatiques sur une charge dans un conducteur devait être nul, que le potentiel à l'intérieur de ce matériau doit être constant. La notion de flux d'un champ de force n'ayant pas à cette époque encore était dégagée, il faudra attendre 1840 pour que cette équation locale soit formulée à l'échelle macroscopique sous la forme du théorème de Gauss.

4.1. Équations de Poisson et de Laplace

1 Équation locale du potentiel

Au chapitre précédent, nous avons établi la relation liant la divergence du champ électrostatique à la densité locale de charges et obtenu ainsi la forme locale du théorème de Gauss donnée par l'expression 3.9 :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Par ailleurs, nous avons montré au chapitre 2 que le champ électrostatique dérive d'un potentiel électrostatique et peut donc s'écrire sous la forme d'un gradient :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V$$

En éliminant le champ électrostatique $\vec{E}$ entre ces deux relations, on obtient une nouvelle relation, dite « équation de Poisson » :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{4.1}$$

L'expression $\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V)$ porte le nom de « laplacien de V » et se représente symboliquement par ΔV ou par $\nabla^2 V$. En coordonnées cartésiennes par exemple, cette équation s'écrira :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Les expressions du laplacien dans les autres systèmes de coordonnées sont données en annexe.

L'équation de Poisson doit être vérifiée par tout potentiel électrostatique. Elle montre que les variations spatiales du potentiel au voisinage d'un point, exprimées par son laplacien, ne dépendent que de la densité de charges en ce point. Soulignons encore que cette équation, décrivant une propriété locale du potentiel, ne contient aucune information physique nouvelle par rapport à la loi de Coulomb ou au théorème de Gauss, mais qu'il s'agit simplement d'une formulation différente de l'électrostatique.

Dans les régions de l'espace présentant une densité de charges nulle, l'équation de Poisson se réduit à :

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} V) = 0 \tag{4.2}$$

Cette équation est connue sous le nom d'« équation de Laplace ». Elle s'applique non seulement à l'extérieur des supports matériels de charges mais également à l'intérieur d'un conducteur (nous verrons au chapitre 6 que la densité de charges à l'intérieur de ces matériaux est strictement nulle, les charges se situant à la surface).

Déterminer le potentiel électrostatique revient donc à chercher les solutions de ces équations différentielles en imposant comme conditions aux limites la valeur du potentiel en certains points donnés de l'espace. Il n'existe malheureusement pas de théorie générale permettant de résoudre ces équations aux dérivées partielles, seules des méthodes particulières adaptées à chaque situation physique ont été développées.

L'équation de Laplace a été particulièrement étudiée, l'ensemble de ses solutions, appelées fonctions harmoniques, possédant quelques propriétés remarquables. Notons également les méthodes de Dirichlet et Van Neumann développées dans le cas des conducteurs à l'équilibre (voir chapitre 6).

2 Existence et unicité de la solution de l'équation locale du potentiel

Les équations de Poisson et de Laplace présentent une propriété essentielle : pour un ensemble de conditions aux limites fixées, ces équations ont une solution et cette solution est unique. En d'autres termes, il n'existe qu'un seul potentiel $V(\vec{r})$ vérifiant l'équation locale et prenant en certains points de l'espace des valeurs fixées au préalable. Ce théorème d'existence et d'unicité est très utile puisqu'il nous assure que toute solution, quelle que

soit la manière dont on l'a trouvée, est la bonne si elle satisfait aux conditions aux limites et à l'équation locale du potentiel.

La démonstration générale de ce double théorème (théorème d'existence et d'unicité) est longue, difficile et n'apporte rien de plus sur le plan de la physique. Toutefois, pour nous convaincre simplement de la validité de ce théorème, nous présentons ici la démonstration de l'unicité de la solution dans le cas de l'équation de Laplace lorsque les conditions aux limites correspondent aux valeurs des potentiels imposées sur un ensemble de surfaces.

Considérons donc un ensemble de surfaces identifiées par l'indice i ($i = 1, 2, 3, \ldots$). Sur chacune d'elles, un potentiel noté V_i est imposé. Le potentiel électrostatique $V(\vec{r})$ doit vérifier, en tout point $\vec{r}$, l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ et satisfaire à l'ensemble des conditions aux limites : $V = V_\mathrm{i}$ sur la $i^{\text{ème}}$ surface. Supposons qu'il existe deux solutions distinctes $V_1(\vec{r})$ et $V_2(\vec{r})$ remplissant ces conditions. Recherchons la solution correspondant à la condition $V_\mathrm{i} = 0$ sur toutes les surfaces. D'après le principe de superposition, cette solution vaudra $V_\mathrm{s}(\vec{r}) = V_1(\vec{r}) - V_2(\vec{r})$ dans tout l'espace. Comme V_s vaut 0 sur toutes les surfaces et à l'infini, il existe nécessairement un point E de l'espace n'appartenant pas aux surfaces S_i pour lequel le potentiel V_s est un extremum, maximum ou minimum que nous appellerons V_{ext}. Par ailleurs, les solutions de l'équation de Laplace présentent une propriété remarquable connue sous le nom de « théorème de la valeur moyenne » qui nous dit que la valeur moyenne du potentiel sur une sphère quelconque est égale à sa valeur au centre de cette sphère (la démonstration de ce théorème est donnée en fin de chapitre). Si nous appliquons ce théorème à une sphère centrée sur E, la valeur moyenne du potentiel sur la sphère devrait être égale à V_{ext}, mais par construction de la sphère et définition de l'extremum, elle est nécessairement inférieure ou supérieure à V_{ext}. Cette incompatibilité montre que $V_\mathrm{s}(\vec{r})$ ne peut être que constant. Par continuité avec le potentiel nul à l'infini, $V_\mathrm{s}(\vec{r})$ est donc nul. Nous pouvons ainsi conclure qu'en tout point de l'espace $V_1(\vec{r}) = V_2(\vec{r})$ et que la solution de l'équation de Laplace est unique.

4.2. Exemple d'utilisation de l'équation locale

1 Calcul du potentiel et du champ créés par une sphère chargée uniformément en volume

Soit une sphère isolante, de rayon a, chargée uniformément en volume par une densité volumique de charges ρ (fig. 4.1). Le potentiel créé par cette distribution de charges doit vérifier l'équation de Laplace à l'extérieur de la sphère et celle de Poisson à l'intérieur, la continuité du potentiel devant être établie à la surface de la sphère.

La symétrie de la distribution de charge suggère que nous utilisions les coordonnées sphériques (r, θ, φ). Dans ce système de coordonnées, le laplacien a pour expression (voir annexe) :

$$\nabla^2 V = \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{\operatorname{cotan}\theta}{r^2}\frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2}$$

La symétrie de la distribution de charges permet d'affirmer que le potentiel V ne dépend ni de φ ni de θ (voir chapitre 3). Aussi l'expression du laplacien se réduit-elle à :

$$\nabla^2 V = \frac{2}{r}\frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right)$$

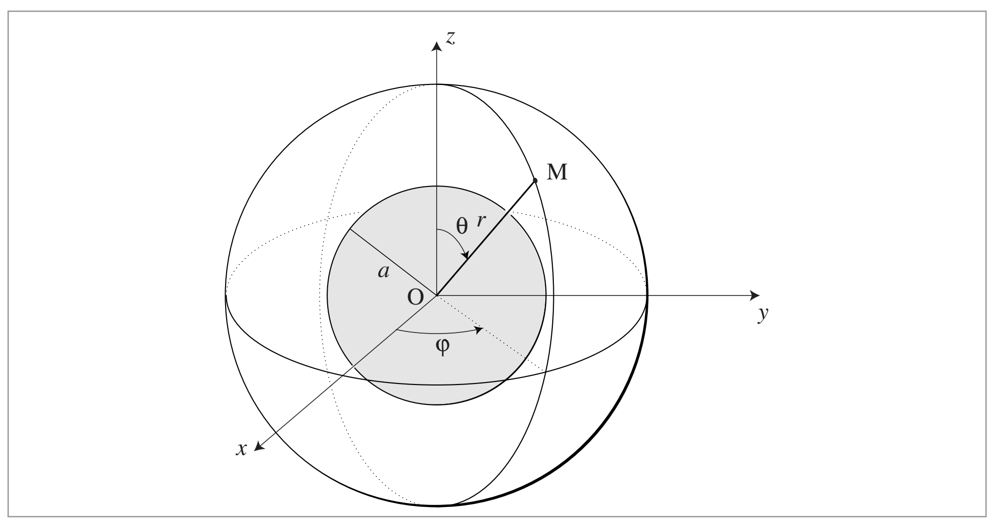


Fig. 4.1. Sphère isolante de rayon a uniformément chargée, $\rho > 0$.

À l'extérieur de la sphère chargée

Puisqu'il n'y a pas de charges à l'extérieur de la sphère, le potentiel doit vérifier l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r}\right) = 0$$

Nous obtenons immédiatement par intégration :

$$r^2 \frac{\partial V(r)}{\partial r} = K = \text{Cte}$$

En utilisant la relation $\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V$, nous pouvons déterminer l'expression du champ électrostatique à l'extérieur de la sphère :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_{\mathrm{r}}(r)\vec{u}_{\mathrm{r}} \quad \text{avec } E_{\mathrm{r}}(r) = -\frac{K}{r^2}$$

La constante K peut alors être déterminée en appliquant le théorème de Gauss. Sur une sphère de Gauss de rayon r, nous obtenons :

$$K = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}$$

L'expression du champ à l'extérieur de la sphère est ainsi totalement déterminée :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\vec{u}_{\mathrm{r}} \quad \text{avec } E_{\mathrm{r}}(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Q étant la charge totale portée par la sphère. Le potentiel $V(r)$ à l'extérieur de la sphère est obtenu par intégration :

$$V(r) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} \qquad \text{pour } r > a$$

Dans cette expression, le potentiel à l'infini est choisi comme origine des potentiels, procédure légitime rappelons-le car il n'y a pas de charges à l'infini.

À l'intérieur de la sphère chargée

À l'intérieur de la sphère isolante, la densité volumique de charges est par hypothèse une constante non nulle. Le potentiel doit donc vérifier l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right) = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial V(r)}{\partial r}\right) = -\frac{\rho r^2}{\varepsilon_0}$$

En intégrant une première fois nous obtenons :

$$r^2\frac{\partial V(r)}{\partial r} = -\frac{\rho r^3}{3\varepsilon_0} + K$$

La composante radiale du champ électrostatique correspondant a pour expression :

$$E_{\mathrm{r}}(\vec{r}) = -\frac{\partial V(r)}{\partial r} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} - \frac{K}{r^2}$$

Ce champ ne peut pas diverger au centre de la sphère (il doit être nul par symétrie), aussi avons-nous nécessairement $K = 0$. Le champ électrostatique à l'intérieur de la sphère s'écrit donc :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_{\mathrm{r}}(r)\vec{u}_{\mathrm{r}} \quad \text{avec } E_{\mathrm{r}}(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

En intégrant cette expression, nous obtenons le potentiel électrostatique à l'intérieur de la sphère :

$$V(r) = -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} + C \quad \text{pour } r < a$$

La continuité du potentiel à la surface de la sphère permet de déterminer la valeur de la constante C :

$$V(r = a) = \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 a} = -\frac{\rho a^2}{6\varepsilon_0} + C$$

ce qui conduit à :

$$C = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}$$

Nous obtenons ainsi l'expression finale du potentiel à l'intérieur de la sphère :

$$V(r) = \frac{\rho(3a^2 - r^2)}{6\varepsilon_0} \quad \text{pour } r < a$$

Les variations de $E_{\mathrm{r}}(r)$ et $V(r)$ sont présentées respectivement sur les figures 4.2 et 4.3.

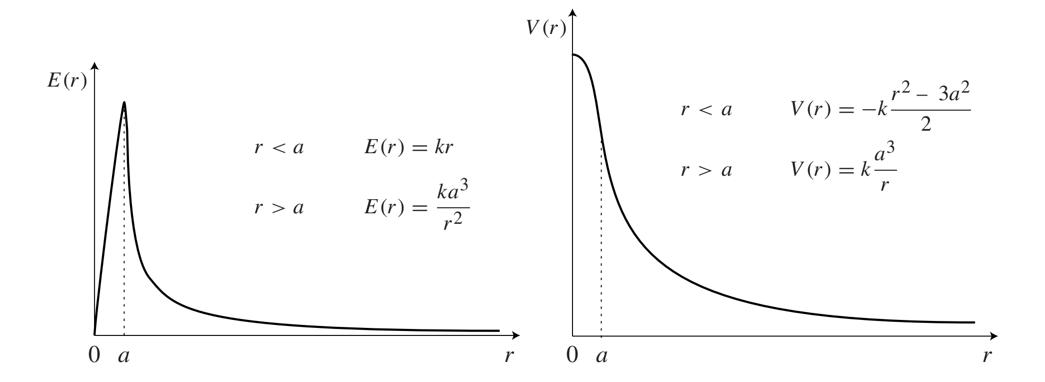


Fig. 4.2. Variations de $E_r(r)$ en fonction de la distance au centre de la sphère.

Fig. 4.3. Variations de $V(r)$ en fonction de la distance au centre de la sphère.

2 Calcul du champ électrostatique au voisinage de l'axe de révolution d'un disque chargé

Nous avons vu dans les chapitres précédents comment calculer le champ électrostatique en des points particuliers de l'espace, appartenant généralement à des axes ou à des plans de symétrie du système. Nous allons voir sur un exemple comment utiliser les équations locales du potentiel pour calculer le champ électrostatique au voisinage de ces points.

Soit un disque de rayon R chargé uniformément par une densité surfacique de charges $\sigma > 0$ (fig. 4.4).

La symétrie de cette distribution suggère d'utiliser les coordonnées cylindriques (r, θ, z). Dans ce système de coordonnées, le champ électrostatique en un point M situé sur l'axe de révolution à la distance z du centre O du disque a pour expression :

$$\vec{E}(0, 0, z) = E_z(0, 0, z)\vec{u}_z$$

avec :

$$E_z(0, 0, z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}}\right)$$

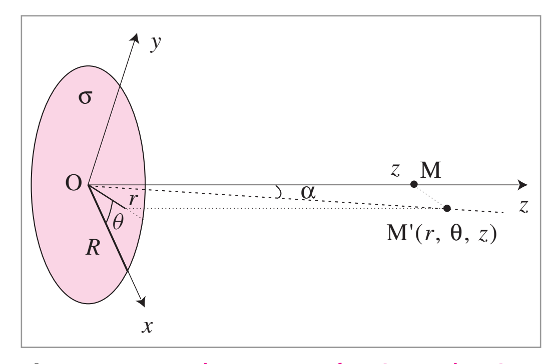


Fig. 4.4. Disque de rayon R uniformément chargé par une densité surfacique σ.

Pour obtenir cette expression, nous avons utilisé la définition du champ électrostatique créé par une distribution continue de charges (relation 2.10) et exploité les propriétés de symétrie du système pour montrer que le champ était nécessairement suivant l'axe Oz. Si maintenant nous voulons calculer ce champ électrostatique en un point M′ près de l'axe du disque, à la distance r de l'axe ($r \ll z$, $r \ll R$), ce champ n'a plus aucune raison d'être dirigé suivant l'axe Oz. Les simplifications introduites par la position particulière du point

$\mathrm{M}(0, 0, z)$ disparaissent et le calcul direct de $\vec{E}$ en $\mathrm{M}'(r, \theta, z)$ utilisant la relation 2.10 devient plus difficile. Nous allons voir comment exploiter l'équation locale du potentiel pour contourner cette difficulté et calculer ce champ électrostatique. À l'extérieur du disque, il n'y a pas de charges. L'équation locale que doit vérifier le potentiel est l'équation de Laplace dont l'expression en coordonnées cylindriques est :

$$\nabla^2 V = -\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rEr) + \frac{\partial E_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta}\right) = 0$$

La symétrie axiale de la distribution de charges permet d'affirmer que la composante orthoradiale E_θ du champ électrostatique est indépendante de θ :

$$\frac{\partial E_\theta}{\partial \theta} = 0$$

L'équation de Laplace se réduit donc à :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \qquad\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) = -\frac{\partial E_z}{\partial z}$$

Pour calculer la composante radiale du champ en M', nous commencerons par calculer $\frac{\partial E_z}{\partial z}$ à partir de l'expression obtenue pour $E(0, 0, z)$ (en toute rigueur, il faudrait calculer $\frac{\partial E_z(r, \theta, z)}{\partial z}$ et non $\frac{\partial E_z(0, 0, z)}{\partial z}$, toutefois cette procédure est légitime puisque $r \ll z$) et résoudrons ensuite l'équation différentielle correspondante pour $E_r(\mathrm{M}')$. Ainsi nous obtenons :

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = -\frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

la composante radiale du champ électrostatique devant alors vérifier l'équation différentielle

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rE_r) = \frac{\sigma R^2}{2\varepsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Après intégration nous obtenons :

$$E_r(r, \theta, z) = \frac{\sigma r R^2}{4\varepsilon_0(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Notons qu'un développement au premier ordre du rapport E_r/E_z montre qu'au point $\mathrm{M}(z, r)$ pour $z \gg R$, l'angle θ' entre le champ et l'axe Oz est égal à l'angle θ' que fait la direction OM avec l'axe Oz. En effet,

$$\tan\theta' = \frac{E_r}{E_z} = \frac{rR^2}{2z^3\left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)\left(\sqrt{1 + \frac{R^2}{z^2}} - 1\right)} \simeq \frac{r}{z}$$

or $\tan\theta' = \frac{r}{z}$. Ceci indique que, loin de la distribution de charges, le champ électrostatique est égal, au premier ordre, à celui créé par une charge ponctuelle, placée en O, égale à la charge totale du disque.

3 Longueur d'écrantage - Longueur de Debye

Supposons un plan maintenu au potentiel V_0 et immergé dans une solution électrolytique constituée d'ions positifs et négatifs. Sous l'influence du champ électrostatique créé par ce plan et par les autres ions, chaque ion, libre de se mouvoir dans la solution, va se déplacer jusqu'à atteindre sa position d'équilibre. Nous allons montrer comment l'équation de Poisson permet de déterminer le potentiel électrostatique au voisinage du plan et la distribution spatiale des ions lorsque cet équilibre est atteint.

Pour simplifier le calcul, nous supposerons le plan infini ; la densité de charges libres $\rho(x)$ en un point ne dépendra alors que de la distance x de ce point au plan. En coordonnées cartésiennes, l'équation de Poisson 4.1 se réduit alors à :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Par ailleurs, on sait qu'à l'équilibre thermique, la concentration $n(x)$ d'ions de charge q ne dépend que de leur énergie $qV(x)$ et de la température T. Nous admettrons que cette dépendance peut être décrite par la relation :

$$n(x) = n_0 \mathrm{e}^{\frac{-qV(x)}{\mathrm{k}T}}$$

où n_0 représente la concentration d'ions loin de la plaque, k étant la constante de Boltzmann égale à $1,38\,10^{-23}$ J/molécule $\times$ degré et T la température absolue. La densité totale de charges s'exprime donc en fonction de $V(x)$ puisque nous avons :

$$\rho(x) = qn_+(x) + (-q)n_-(x)$$
$$\rho(x) = qn_0\left(\mathrm{e}^{\frac{-qV(x)}{\mathrm{k}T}} - \mathrm{e}^{\frac{qV(x)}{\mathrm{k}T}}\right)$$

En introduisant cette expression dans l'équation de Poisson, nous obtenons l'équation que doit vérifier le potentiel $V(x)$:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{qn_0}{\varepsilon_0}\left(\mathrm{e}^{\frac{-qV(x)}{\mathrm{k}T}} - \mathrm{e}^{\frac{qV(x)}{\mathrm{k}T}}\right)$$

Cette équation se résout facilement en intégrant par rapport à x après avoir multiplié les deux membres de l'équation par $2\frac{\partial V}{\partial x}$. Pour ne pas compliquer inutilement le problème, nous nous limiterons au cas des faibles potentiels et des températures élevées ($qV \ll \mathrm{k}T$) (à la température ambiante de 300 K, kT est voisin de 25 meV). Dans ce cas, nous pouvons développer les exponentielles au premier ordre :

$$\mathrm{e}^{\pm\frac{qV(x)}{kT}} = 1 \pm \frac{qV(x)}{\mathrm{k}T}$$

L'équation de Poisson devient :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -\frac{2q^2 n_0}{\varepsilon_0 \mathrm{k}T}V(x)$$

La solution générale de cette équation est de la forme :

$$V(x) = A\mathrm{e}^{+\frac{x}{D}} + B\mathrm{e}^{-\frac{x}{D}} \qquad \text{avec } D^{-2} = \frac{2q^2 n_0}{\varepsilon_0 \mathrm{k}T}$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions aux limites que nous avons imposées. A doit être nul, sinon le potentiel loin du plan deviendrait infini et B, correspondant à $V(x = 0)$, est égal à V_0. Nous obtenons ainsi les expressions du potentiel $V(x)$ et de la densité de charges $\rho(x)$:

$$V(x) = V_0 e^{-\frac{x}{D}}$$

$$\rho(x) = -\frac{2q^2 n_0 V_0}{kT} e^{-\frac{x}{D}}$$

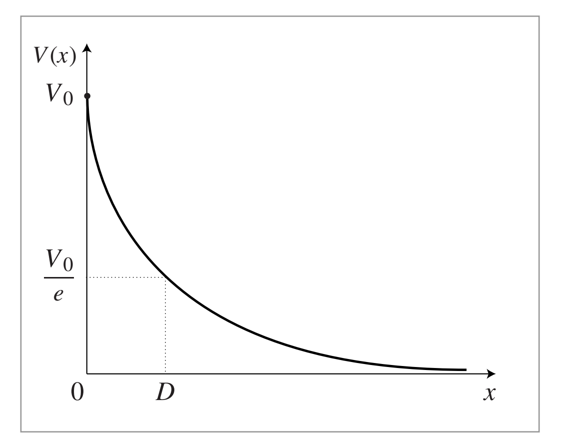


Fig. 4.5. Variations en fonction de la distance au plan chargé du potentiel électrostatique $V(x)$.

Le potentiel électrostatique comme la densité de charges correspondant à l'équilibre thermique, représentés sur les figures 4.5 et 4.6, décroissent de $1/e$ toutes les fois que l'on s'éloigne du plan d'une quantité D appelée « longueur de Debye ».

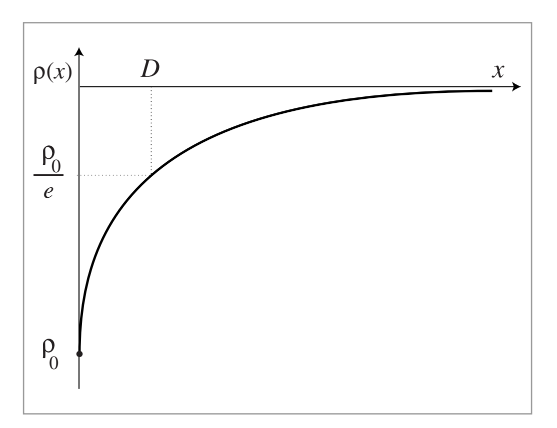


Fig. 4.6. Variations en fonction de la distance au plan chargé de la densité d'ions $\rho(x)$.

Au-delà de cette longueur caractéristique, le potentiel et la densité de charges varient beaucoup moins vite et pourront donc être considérés comme constants, Ceci explique que parfois cette longueur D soit également appelée longueur d'écrantage : tout ion situé au-delà de cette longueur ressentira un potentiel nul, la redistribution des ions faisant « écran » à l'existence d'un plan au potentiel V_0. Dans le cas de solutions électrolytiques, la longueur d'écran peut être très grande si la solution ne contient qu'une faible quantité d'ions ; si nous extrapolons la démonstration que nous venons de faire au cas des électrons dans un métal ou dans un semiconducteur, nous obtenons des longueurs de Debye respectivement de l'ordre de l'Å ou du nm.

Complément : Théorème de la valeur moyenne sur une sphère

Dans les régions de l'espace où il n'y a pas de charges, la valeur moyenne du potentiel sur une sphère quelconque est égale à sa valeur au centre de cette sphère.

Pour démontrer ce théorème, considérons une charge ponctuelle q placée au point A et une sphère fictive de surface S centrée à l'origine ($OA = d$).

Cette charge crée en un point M de la sphère, distant de r, un potentiel :

$$V_q(M) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

Par définition, la valeur moyenne de ce potentiel sur la sphère s'écrit :

$$\overline{V} = \frac{1}{S}\iint_S V_q(M)\,dS$$
$$= \frac{q}{S}\iint_S \frac{dS}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

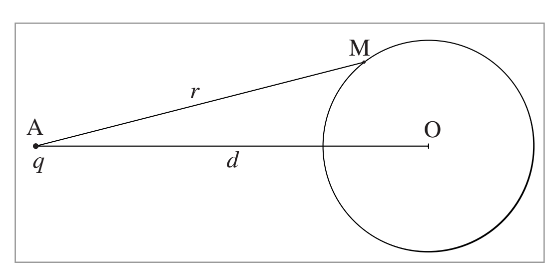


Fig. 4.7.

Pour calculer cette valeur moyenne, nous allons supposer que la sphère est chargée, sa charge q' étant uniformément répartie sur sa surface avec la densité $\sigma = \frac{q'}{S}$. Nous identifions l'énergie potentielle d'interaction U entre la charge q et la sphère chargée, exprimée soit en fonction du potentiel V_q créé par la charge q, soit en fonction du potentiel $V_s(A)$ créé par la sphère au point A.

Nous pouvons ainsi écrire par définition (voir chapitre 8) :

$$U = \iint_S \sigma' V_q(M)\,dS = \frac{q'}{S}\iint_S V_q(M)\,dS = q'\overline{V}$$
$$U = qV_s(A) = \frac{qq'}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Cette dernière équation est obtenue simplement en utilisant le fait que le potentiel créé par la sphère au point A est le même que celui qui serait créé par une charge q' placée au centre de la sphère (voir chapitre 3). En égalant les deux expressions de l'énergie d'interaction, nous obtenons :

$$\overline{V} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

Nous constatons que ce potentiel moyen est égal à la valeur du potentiel créé par q au point O. Le principe de superposition permet d'étendre cette démonstration à toute distribution de charge. La proposition est ainsi démontrée.

Exercices

1 Calculer, à partir de l'équation de Laplace ou de Poisson le champ et le potentiel électrostatiques créés en tout point de l'espace par un cylindre homogène infini de rayon a, de densité volumique ρ.

2 On considère un carré ABCD de côté $a\sqrt{2}$, de centre O. Sur chaque sommet du carré, on place une charge positive q fixe, de masse m.

On place alors un charge positive q', de masse m' en O.

a. Montrer que le potentiel $V(x, y)$ d'un point $M(x, y)$ très proche de O est donné par :

$$V(x, y) = \frac{q}{\pi\varepsilon_0 a} + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$$

b. Calculer directement le potentiel $V(x, 0)$ en un point $M(x, 0)$ très proche de O à partir des potentiels $V(A)$, $V(B)$, $V(C)$ et $V(D)$.

c. En déduire que

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 a^3}$$

et la valeur du potentiel $V(x, y)$.

d. Montrer que la position d'équilibre est stable dans le plan du carré et instable sur un axe orthogonal au plan du carré.

e. On écarte, dans le plan, la charge q' de sa position d'équilibre. Donner l'équation du mouvement de la charge q' et calculer la période des petites oscillations dans le plan du carré. Quel serait le mouvement de q' si on l'écartait hors du plan ?

f. Reprendre l'ensemble des questions précédentes en supposant maintenant que la charge q' est négative.

3 Soit un champ électrostatique tel que $\vec{E} = E_r\vec{u}_r + E_z\vec{u}_z$ présente une symétrie de révolution autour de l'axe Oz dans une région de l'espace vide de charges. Montrer que $E_r \sim -\frac{r}{2}\frac{\partial E_z}{\partial z}$.

4 On peut considérer que le potentiel :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^{-r/a}}{r}$$

est créé par une charge ponctuelle q placée en O et une charge de densité volumique $\rho(r)$ répartie dans tout l'espace.

a. Calculer la densité volumique $\rho(r)$ de cette distribution et le potentiel qu'elle crée en $r = 0$.

b. Donner l'ordre de grandeur de $V(0)$ si $a = 1$ Å et $q = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C.

Indice. *On utilisera l'équation de Poisson en coordonnées sphériques.*

5 On considère un plasma en équilibre thermique constitué d'ions et d'électrons dont les densités particulaires autour d'un ion positif sont $n_{\text{ions}} = n_0 e^{-\alpha V(r)}$ et $n_{\text{el}} = n_0 e^{+\alpha V(r)}$ où $V(r)$ est le potentiel créé en M à la distance r de l'ion positif pris comme origine et α dépend de la température T ($\alpha = \frac{q}{kT}$).

a. Déterminer la densité particulaire en M et calculer α à la température de fusion thermonucléaire $T = 10^7$ K où existe le plasma. L'approximation $qV(r) \ll kT$ parait-elle justifiée ici ?

b. Écrire l'équation de Poisson en M et montrer que dans l'approximation $qV(r) \ll kT$, $V(r)$ est bien représenté par le potentiel de Yukawa $V(r) = \frac{C}{r}e^{-r/a}$.

c. Trouver l'expression de la longueur de Debye du plasma et sa valeur si $n_0 = 10^{20}$ m^{-3}.

d. Comparer le potentiel $V(r)$ à celui créer par l'ion positif situe en O et montrer que les charges qui l'entourent jouent le rôle d'écran. Quel est le potentiel d'écran ?

Chapitre 5

Dipôles et multipôles électriques

Parmi les distributions de charges, les systèmes constitués de deux charges de même grandeur et de signes opposés, les dipôles électriques, jouent un rôle tout aussi important en électrostatique que les charges ponctuelles. En particulier, loin d'une distribution quelconque de charges globalement neutre, le potentiel qu'elle engendre peut souvent être assimilé à celui que créerait un dipôle associé à cette distribution. Dans ce chapitre, nous présenterons les principales caractéristiques des dipôles et la méthode dite du « développement multipolaire » utilisée pour le calcul du potentiel approché loin d'une distribution quelconque de charges.

5.1 Ensemble de deux charges électriques de même grandeur et de signes opposés

1 Potentiel électrique créé par le système $(+q, -q)$

2 Champ électrique créé par le système $(+q, -q)$

3 Moment dipolaire

5.2 Notion de développement multipolaire

1 Développement multipolaire du potentiel créé par une distribution discrète de charges

2 Développement multipolaire du potentiel créé par une distribution continue de charges

5.3 Exemple de distributions multipolaires

1 Dipôle moléculaire

2 Champ et potentiel créés par deux distributions sphériques de signes contraires, légèrement décalées

Mots-clés

- **Dipôles** • **Multipôles** • **Moment dipolaire**

5.1. Ensemble de deux charges électriques de même grandeur et de signes opposés

Nous ne préciserons plus à partir de maintenant le caractère électrostatique du champ et du potentiel puisqu'il est désormais supposé acquis que ce caractère ne s'applique qu'à des champs et des potentiels créés par des charges statiques. Nous allons étudier le potentiel et le champ électrique créés par un système de deux charges électriques de même grandeur et de signe opposé et montrer qu'un tel système peut être considéré dans certaines conditions comme un « objet électrique » à part entière, le « dipôle électrique », ayant autant d'importance que « l'objet électrique » « charge ponctuelle ». Considérons donc deux charges, q_A et q_B, $q_A = -q_B = -q$, séparées par une distance a. Leurs positions seront notées respectivement $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$, on prendra par commodité l'origine des espaces au milieu O de AB, $\vec{r}_A = -\vec{r}_B$ (fig. 5.1).

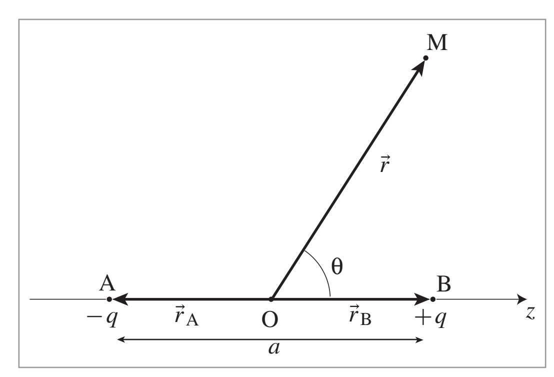


Fig. 5.1. Dipôle électrostatique.

1 Potentiel électrique créé par le système $(+q, -q)$

D'après le principe de superposition, le potentiel électrique, créé par cet ensemble de deux charges en un point M quelconque caractérisé par sa position $\vec{r}$, est égal à :

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec{r}-\vec{r}_A|} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\,|\vec{r}-\vec{r}_B|} \\ &= -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_A|} - \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_B|}\right) \end{aligned} \tag{5.1}$$

Les distances $|\vec{r}-\vec{r}_A|$ et $|\vec{r}_B|$ peuvent s'exprimer en fonction des coordonnées sphériques (r, θ, φ) du point M, l'axe contenant les deux charges étant confondu avec Oz. Pour calculer le champ et le potentiel en un point situé sur l'axe de révolution ou dans le plan médian, il sera plus commode d'utiliser les coordonnées cartésiennes. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} |\vec{r}-\vec{r}_A|^2 &= (\vec{r}-\vec{r}_A)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_A) = \frac{a^2}{4} + r^2 + ar\cos\theta \\ &= r^2\left(1 + \frac{a^2}{4r^2} + \frac{a}{r}\cos\theta\right) \\ |\vec{r}-\vec{r}_B|^2 &= (\vec{r}-\vec{r}_B)\cdot(\vec{r}-\vec{r}_B) = \frac{a^2}{4} + r^2 - ar\cos\theta \\ &= r^2\left(1 + \frac{a^2}{4r^2} - \frac{a}{r}\cos\theta\right) \end{aligned} \tag{5.2}$$

Le potentiel $V(\vec{r})$ s'écrit donc :

$$V(\vec{r}) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\left(1+\frac{a^2}{4r^2}+\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2} - \left(1+\frac{a^2}{4r^2}-\frac{a}{r}\cos\theta\right)^{-1/2}\right) \quad (5.3)$$

Notons que ce potentiel est indépendant de l'angle φ, conformément à l'invariance par rotation autour de l'axe Oz de système de charges.

Cette expression donne le potentiel créé en tout point de l'espace. Elle est peu utilisée sous cette forme complète. En effet comme nous le verrons au paragraphe 5.2, dans la plupart des cas on ne souhaite connaître le potentiel qu'en un point éloigné d'un tel système de charges et une expression approchée de ce potentiel est alors suffisante. Calculons cette expression approchée. Si les distances AM et BM sont très grandes devant la distance a entre les charges, nous pouvons effectuer le développement limité des expressions 5.2 en fonction de la variable a/r. Nous obtenons ainsi au premier ordre (rappelons que si $\varepsilon \ll 1$, $(1+\varepsilon)^n \simeq 1 + n\varepsilon$) :

$$|\vec{r}-\vec{r}_A| \sim r\sqrt{1+\frac{a}{r}\cos\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_A|} \sim \frac{1-\left(\frac{a}{2r}\right)\cos\theta}{r}$$

$$|\vec{r}-\vec{r}_B| \sim r\sqrt{1-\frac{a}{r}\cos\theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_B|} \sim \frac{1+\left(\frac{a}{2r}\right)\cos\theta}{r}$$

En introduisant ces distances dans l'expression 5.1, nous obtenons le potentiel calculé en un point M éloigné de la distribution de charges :

$$V(\vec{r}) = \frac{qa\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (5.4)$$

2 Champ électrique créé par le système $(+q, -q)$

Le champ électrique créé par le système de charges $(+q, -q)$ peut se calculer exactement, soit en utilisant la définition donnée au chapitre 2, soit en appliquant la relation $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ au potentiel donné par la relation 5.3. Ce calcul exact est rarement utile et une expression approchée correspondant au champ électrique créé en un point éloigné du dipôle est la plus souvent employée. Pour calculer cette expression approchée, il suffit d'appliquer la relation $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$ au potentiel approché 5.4. La symétrie axiale de révolution impose au potentiel d'être indépendant de l'angle φ, le champ électrique ne présentera donc aucune composante suivant $\vec{u}_\varphi$, puisqu'elle est proportionnelle $\partial V/\partial\varphi$. Ainsi, seules les composantes suivant $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$ sont non nulles (il en serait de même bien entendu dans le cas du calcul exact du champ électrique) :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(r,\theta,\varphi) = E_r(r,\theta,\varphi)\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,\varphi)\vec{u}_\theta$$

avec

$$E_r(r,\theta,\varphi) = -\frac{\partial V}{\partial r} \quad (5.5)$$

$$E_\theta(r,\theta,\varphi) = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial\theta} \quad (5.6)$$

Nous obtenons ainsi les expressions approchées du champ électrique :

$$
\begin{aligned}
E_r(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{2qa\cos\theta}{r^3} \\
E_\theta(r, \theta, \varphi) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qa\sin\theta}{r^3} \\
E_\varphi(r, \theta, \varphi) &= 0
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

Nous pouvons également calculer le module du champ électrique :

$$E = \frac{qa}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\sqrt{1 + 3\cos^2\theta}$$

Les lignes de champ électrique associées à un tel système de charges sont présentées sur la figure 5.2.

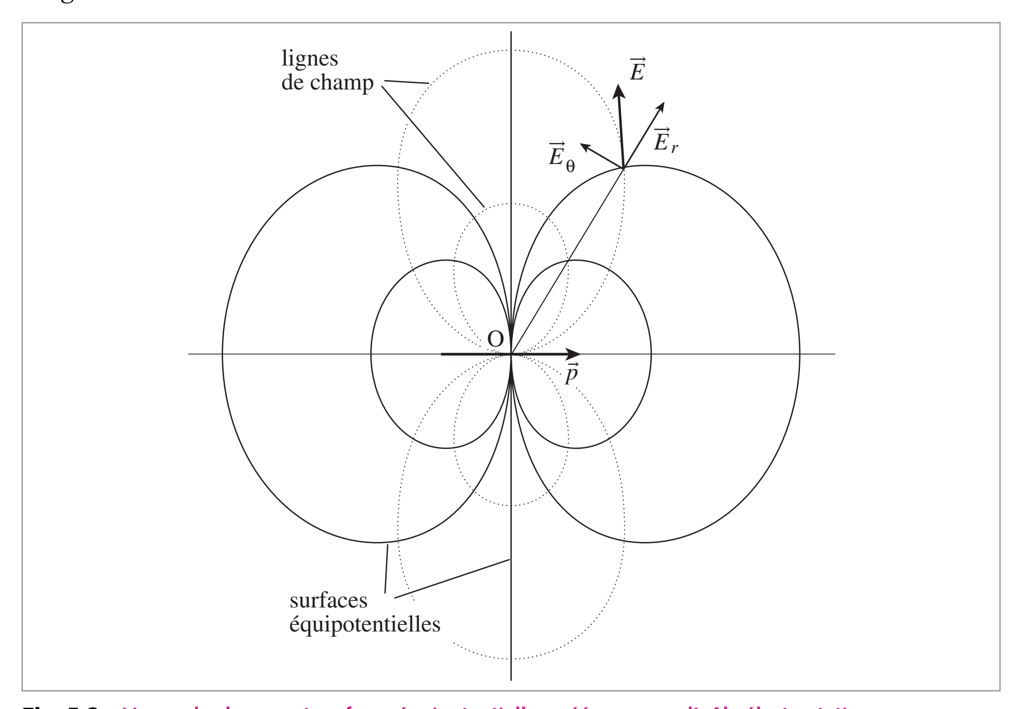


Fig. 5.2. Lignes de champs et surfaces équipotentielles créées par un dipôle électrostatique.

Remarquons que le champ électrique en un point M appartenant au plan médian $\left(\theta = \frac{\pi}{2}\right)$ a pour expression :

$$
\begin{aligned}
E_r\left(r, \frac{\pi}{2}, \varphi\right) &= 0 \\
E_\theta\left(r, \frac{\pi}{2}, \varphi\right) &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qa}{r^3} \\
E_\varphi\left(r, \frac{\pi}{2}, \varphi\right) &= 0
\end{aligned}
$$

Ce vecteur correspond à un champ électrique perpendiculaire au plan médian, résultat en accord avec l'argument de symétrie qui indique que le champ électrique en tout point appartenant à un plan d'antisymétrie électrique doit être perpendiculaire à ce plan (voir chapitre 3). De la même manière, selon les relations 5.7, le champ électrique calculé en un point M situé sur l'axe Oz ($\theta = 0$) est dirigé suivant $\vec{u}_r$ c'est-à-dire le long de Oz. Comme précédemment, ce résultat aurait pu être anticipé par des arguments de symétrie. En effet, puisque M appartient à une infinité de plans de symétrie contenant Oz et que le champ doit, dans ces conditions, également appartenir à cette même infinité de plans, il ne peut être dirigé que selon l'axe Oz.

3 Moment dipolaire

Nous allons voir dans ce paragraphe que loin d'un système constitué de deux charges de même grandeur et de signe opposé, q_A et q_B situées respectivement aux points $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$, le potentiel et le champ électriques peuvent être considérés comme créés par un « objet électrique » unique, caractérisé par sa position $\vec{r}$ et une grandeur vectorielle $\vec{p}$ appelée « moment dipolaire électrique ».

Par définition, le moment dipolaire associé à cette distribution de charges est égal à :

$$\vec{p} = q_A \vec{r}_A + q_B \vec{r}_B = -q(\vec{r}_A - \vec{r}_B)$$

et sa position est caractérisée par :

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_A + \vec{r}_B}{2}$$

En appliquant ces définitions à l'exemple présenté au paragraphe 1, nous obtenons :

$$\vec{p} = (-q)\vec{r}_A + (+q)\vec{r}_B = qa\vec{u}_z$$
$$\vec{r} = \vec{0}$$

Loin des charges, le potentiel et le champ électrique, donnés par les relations 5.4 et 5.7, s'expriment alors simplement en fonction de ce moment $\vec{p}$. Ainsi en un point M(r, θ, φ) loin du dipôle

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \tag{5.8}$$

$$\vec{E}(\vec{r}) \begin{cases} E_r(r, \theta, \varphi) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{2\vec{p} \cdot \vec{u}_r}{r^3} \\ E_\theta(r, \theta, \varphi) = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{-\vec{p} \cdot \vec{u}_\theta}{r^3} \\ E_\varphi(r, \theta, \varphi) = 0 \end{cases} \tag{5.9}$$

Nous dirons des expressions 5.8 et 5.9, qu'elles décrivent « le potentiel et le champ créés au point $\vec{r}$ par un dipôle $\vec{p} = qa\vec{u}_z$, placé à l'origine ». Cette formulation ne doit toutefois pas nous faire oublier que ces expressions ne sont valables que pour des distances $\vec{r}$ grandes devant la distance entre les charges constituants le dipôle. L'unité du moment dipolaire devrait être le Coulomb-mètre, toutefois il est d'usage d'utiliser le Debye, un Debye correspond à $\frac{1}{3} \cdot 10^{-29}$ C.m.

5.2. Notion de développement multipolaire

Considérons maintenant une distribution de charges quelconque et supposons que nous voulions déterminer le potentiel électrique créé par cette distribution en un point situé à une distance grande devant ses dimensions. Formellement, ce potentiel peut être calculé exactement en utilisant les définitions du chapitre 2 ; toutefois, lorsque la distribution présente peu de symétries permettant de le simplifier, ce calcul n'est pas toujours possible. Par ailleurs, et y compris pour une distribution très symétrique, il n'est pas non plus toujours nécessaire de déterminer ce potentiel avec précision, un calcul approché étant parfois largement suffisant pour rendre compte des effets observés. Dans ces deux situations, il convient d'utiliser une méthode permettant une évaluation approchée du potentiel à grande distance. C'est cette méthode, dite « du développement multipolaire » de la distribution que nous discuterons maintenant, en commençant par le cas d'une distribution discrète.

1 Développement multipolaire du potentiel créé par une distribution discrète de charges

Considérons donc la distribution discrète $(q_i, \vec{r}_i)$ présentée sur la figure 5.3. Par définition, en vertu du principe de superposition, le potentiel en un point M caractérise par sa position $\vec{r}$ est donné par :

$$V(\vec{r}) = \sum_i \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 |\vec{r} - \vec{r}_i|} \qquad (5.10)$$

Fig. 5.3. Distribution discrète $(q_i, \vec{r}_i)$ de charges.

Nous pouvons écrire pour chaque distance $|\vec{r} - \vec{r}_i|$:

$$\begin{aligned} |\vec{r} - \vec{r}_i|^2 &= (\vec{r} - \vec{r}_i) \cdot (\vec{r} - \vec{r}_i) \\ &= r^2 + r_i^2 - 2rr_i \cos\theta_i \end{aligned}$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 - 2\frac{r_i}{r}\cos\theta_i + \frac{r_i^2}{r^2}}}$$

θ_i étant l'angle entre r et r_i. Puisque nous nous intéressons uniquement au potentiel et au champ électriques créés en un point M éloigné de cette distribution, nous pourrons considérer chaque $r_i \ll r$ et développer toutes les distances en puissance du rapport r_i/r. Nous pourrons ainsi écrire pour chaque charge q_i :

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_i|} = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{r_i}{r}\cos\theta_i + \frac{1}{2}\frac{r_i^2}{r^2}(3\cos^2\theta_i - 1) + \cdots\right)$$

En introduisant ce développement dans l'expression 5.10, nous obtenons pour le potentiel au point M :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \sum_{\mathrm{i}} \left(\frac{q_{\mathrm{i}}}{r} + \frac{q_{\mathrm{i}} r_{\mathrm{i}}}{r^2} \cos\theta_{\mathrm{i}} + \frac{1}{2} \frac{q_{\mathrm{i}} r_{\mathrm{i}}^2}{r^3} (3\cos^2\theta_{\mathrm{i}} - 1) + \cdots \right) \tag{5.11}$$

Notons que nous n'avons fait encore aucune approximation, il ne s'agit là que d'un simple changement d'écriture du potentiel exact $V(\vec{r})$.

La méthode du « développement multipolaire » de la distribution consiste à approximer le potentiel $V(\vec{r})$ créé par la distribution de charges au potentiel calculé en ne retenant qu'un nombre limité de termes du développement 5.11, ce nombre dépendant du degré de précision souhaité. Examinons plus en détails chacun de ces termes.

Le premier de ces termes est égal à :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sum q_{\mathrm{i}}}{r}$$

la somme $\sum q_{\mathrm{i}}$ représentant la charge totale associée à la distribution, ce terme en $1/r$ est celui que nous aurions obtenu si la charge totale était placée à l'origine. Ceci se comprend aisément : « vue de loin », la distribution de charges apparaît en première approximation comme une seule charge ponctuelle. Si cette charge totale est non nulle, cette seule contribution « monopolaire » peut être suffisante, si on le souhaite, pour décrire le potentiel $V(\vec{r})$. Dans le cas contraire, il est indispensable de considérer le terme suivant dans le développement 5.11. En effet, le potentiel nul auquel conduit l'approximation « monopolaire » peut avoir deux origines : soit le potentiel est réellement nul, soit ce résultat particulier est dû au caractère trop grossier de l'approximation.

Interprétons le second terme égal à :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\sum q_{\mathrm{i}} r_{\mathrm{i}} \cos\theta_{\mathrm{i}}}{r^2}$$

En introduisant le vecteur $\vec{p} = \sum_{\mathrm{i}} q_{\mathrm{i}} \vec{r}_{\mathrm{i}}$, nous pouvons réécrire cette contribution sous la forme :

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}_{\mathrm{r}}}{r^2}$$

Cette expression est strictement identique à celle que nous avons obtenue en 5.8 dans le cas du dipôle. Ce n'est pas un hasard. Le vecteur $\vec{p}$ est le moment dipolaire associé à cette distribution, généralisation à plusieurs charges du moment défini au paragraphe 5.1. Nous pouvons en effet nous représenter ce moment comme celui du dipôle constitué par une charge ponctuelle, somme de toutes les charges positives contenues dans la distribution située en leur barycentre, et par son équivalent correspondant aux charges négatives. Cette contribution est la contribution dipolaire électrique au potentiel. Elle signifie qu'en seconde approximation, il convient de considérer non plus la charge totale de la distribution, mais également les positions relatives de ses charges positives et négatives. Si la charge totale est nulle, ce terme sera la première contribution au potentiel approché ; dans le cas contraire il s'agira d'une petite correction au terme principal donné par la contribution « monopolaire ».

Si la charge totale est nulle et que le moment $\vec{p}$ l'est également, il faudra prendre le terme suivant dans le développement 5.11 :

$$\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{\sum q_i r_i^2(3\cos^2\theta_i - 1)}{r^3}$$

Indiquons sans rentrer dans les détails, que cette troisième contribution, dite quadrupolaire, rend compte de la façon dont les charges positives et négatives se distribuent autour de leurs barycentres respectifs.

2 Développement multipolaire du potentiel créé par une distribution continue de charges

Considérons maintenant une distribution volumique de charges caractérisée par une densité $\rho(\vec{r}\,')$ (fig. 5.4) et déterminons le potentiel qu'elle crée en un point $M(\vec{r})$ très éloigné.

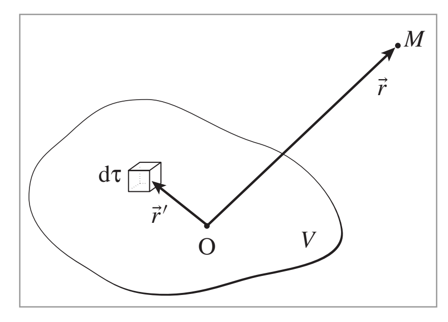


Fig. 5.4. Distribution volumique de charges.

La procédure que nous venons de développer pour une distribution discrète se généralise au cas de cette distribution continue. Comme nous l'avons vu au chapitre 2, le potentiel électrique exact créé par cette distribution au point M s'obtient par intégration, sur tout le volume chargé, du potentiel élémentaire créé par un élément infinitésimal de charge $\rho(\vec{r})\,d\tau$ centré au point $\vec{r}\,'$. Nous pouvons ainsi écrire :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}\,d\tau$$

En procédant comme au paragraphe précédent, nous obtenons l'expression du potentiel en un point M, éloigné de la distribution, en puissance de r'/r :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}\iiint_V \rho(\vec{r}\,')\,d\tau + \frac{1}{r^2}\iiint_V \rho(\vec{r}\,')r'\cos\theta\,d\tau \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\frac{1}{r^3}\iiint_V \rho(\vec{r})\,r'^2\,(3\cos^2\theta - 1)\,d\tau\cdots\right)$$

où θ dépend de r' et représente l'angle entre les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{r}\,'$.

Dans le premier terme de cette expression, l'intégrale représente la charge totale associée à la distribution. Nous reconnaissons là la contribution « monopolaire » au potentiel $V(\vec{r})$. La densité $\rho(\vec{r})$ pouvant être localement positive ou négative, la seconde intégrale prend en compte l'écart entre les centres de gravité des distributions de charges positives et négatives. Il s'agit du terme « dipolaire ». Le troisième terme correspond à la contribution quadrupolaire au potentiel.

5.3. Exemple de distributions multipolaires

1 Dipôle moléculaire

De nombreuses molécules neutres présentent des distributions de charges qui leur confèrent un moment dipolaire permanent : ce sont les molécules polaires.

La molécule d'eau est une de ces molécules, calculons son moment dipolaire. Une molécule d'eau, H_2O, peut être considérée en première approximation comme un système de trois charges : l'atome d'oxygène porte la charge négative $q_1 = -2e$ tandis que les deux atomes d'hydrogène portent chacun la charge positive $q_2 = q_3 = e$. Comme l'indique la figure 5.5, les trois atomes sont situés respectivement aux points G_-, A, B, la liaison O–H est de longueur $d = 1$ Å et l'angle α entre les deux liaisons vaut 104°.

Le moment dipolaire de la molécule d'eau est égal par définition à :

$$\vec{p} = (-2e)\overrightarrow{OG_-} + (e)\overrightarrow{OA} + (e)\overrightarrow{OB}$$

En introduisant le point G_+, barycentre des charges positives, correspondant au milieu de AB, nous obtenons :

$$\begin{aligned}\vec{p} &= (-2e)\overrightarrow{OG_-} + e(\overrightarrow{OG_+} + \overrightarrow{G_+A} + \overrightarrow{OG_+} + \overrightarrow{G_+B}) \\ &= (-2e)\overrightarrow{OG_-} + 2e\overrightarrow{OG_+} \\ \vec{p} &= 2e\overrightarrow{G_-G_+}\end{aligned}$$

Le module de ce moment est égal à $2ed \cos \frac{\alpha}{2}$ et vaut $1,97 \cdot 10^{-29}$ C.m, soit 5,9 Debye.

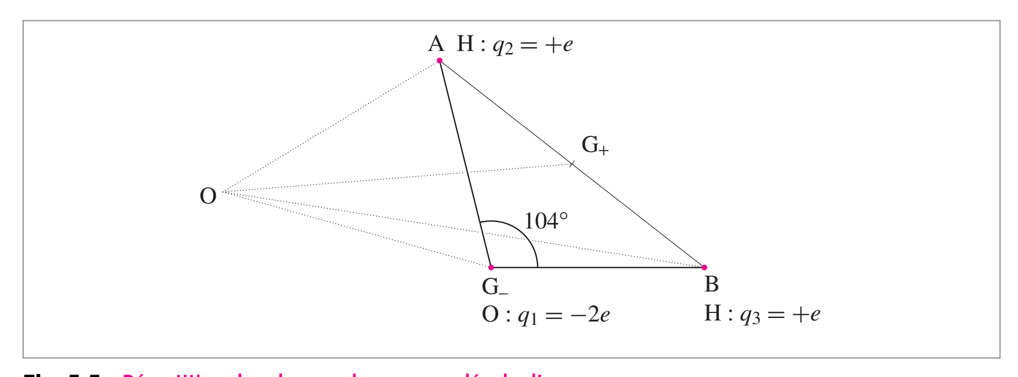


Fig. 5.5. Répartition des charges dans une molécule d'eau.

En fait, les mesures expérimentales conduisent à un moment dipolaire permanent de 1,51 Debye. La raison en est que les charges ne sont pas strictement localisées, mais sont réparties sur des « nuages électroniques » autour des noyaux atomiques. Le moment mesuré correspond à des charges effectives localisées de l'ordre de $0,5e$ sur l'oxygène et d'un quart d'électron sur les hydrogènes.

À titre de comparaison, nous donnons ci-dessous les valeurs des moments dipolaires de quelques molécules :

NH_3	ammoniac	1,47 D
HCl	acide chlorhydrique	1,08 D
$CHCl_3$	chloroforme	1,06 D
CH_3COOH	acide acétique	1,70 D
CH_3COCH_3	acétone	2,85 D

2 Champ et potentiel créés par deux distributions sphériques de signes contraires, légèrement décalées

Considérons deux sphères de même rayon R, de centres O_1 et O_2 différents, ayant des densités volumiques de charges uniformes opposées, $+\rho$ et $-\rho$ (fig. 5.6). Le champ électrique créé par cette distribution de charges en un point M est la superposition des champs créés par chacune des sphères.

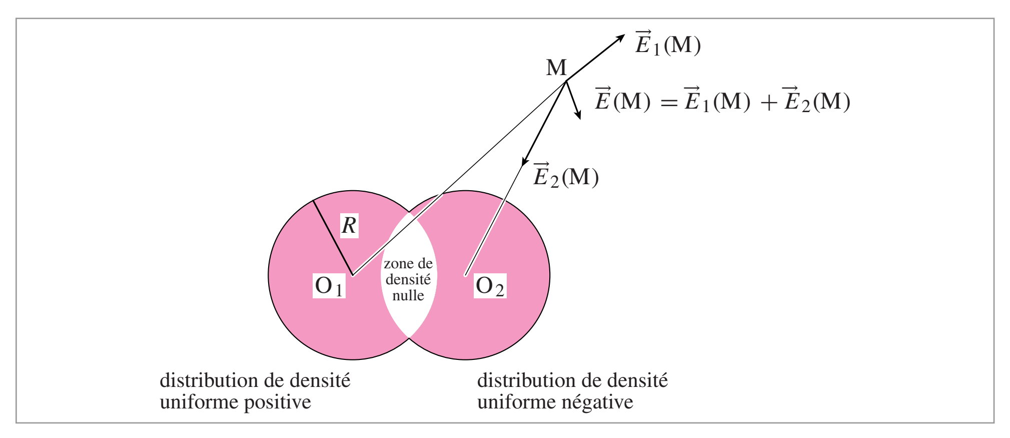


Fig. 5.6. Champ électrostatique crée par deux sphères chargées uniformément de signe opposé.

À l'extérieur du domaine occupé par les charges, chaque sphère crée un champ égal à celui qui serait créé par sa charge totale ramenée à une charge ponctuelle placée en son centre (voir chapitre 3). À l'extérieur de la distribution de charges, ce système se comporte donc comme deux charges ponctuelles $\frac{4\pi}{3}R^3\rho$ et $-\frac{4\pi}{3}R^3\rho$ situées respectivement en O_1 et O_2. Le moment dipolaire associé à cette distribution est par définition égal à :

$$\vec{p} = -\frac{4\pi}{3}R^3\rho\overrightarrow{O_1O_2}$$

Loin des deux sphères, le potentiel et le champ électriques pourront être calculés en introduisant cette expression du moment dipolaire $\vec{p}$ dans les relations 5.4 et 5.7. Notons que le champ électrique dans la zone commune aux deux sphères est quant à lui uniforme.

En effet, le champ électrique au point M, somme des champs créés par chacune des sphères calculés séparément en appliquant le théorème de Gauss, a pour expression :

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = \vec{E}_1(\mathrm{M}) + \vec{E}_2(\mathrm{M}) = \frac{\rho\overrightarrow{\mathrm{O_1M}}}{3\varepsilon_0} - \frac{\rho\overrightarrow{\mathrm{O_2M}}}{3\varepsilon_0} = +\frac{\rho\overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}}}{3\varepsilon_0}$$

Recheche & Développement

Électrocardiologie et modèle de Einthoven

Les fibres musculaires cardiaques sont des générateurs électriques. Ceux-ci créent dans le cœur et dans son voisinage des distributions successives de charges qui déterminent à la surface du corps une distribution de potentiels. En mesurant la différence de potentiel entre des points arbitrairement choisis on évalue l'activité électrique du cœur et, par voie de conséquence, son bon fonctionnement. Cette technique s'appelle l'électrocardiographie. Durant un cycle complet, une fibre cardiaque passe par quatre phases :

- la phase diastolique, toute la fibre est au même potentiel, dit potentiel de repos ;
- la phase d'activation, certaines parties de la fibre passent du potentiel de repos au potentiel d'activation, la fibre est alors assimilable à un dipôle dit « d'excitation » ;
- toute la fibre est activée, la fibre est au même potentiel d'activation et ne présente plus de dipôle ;
- la fibre se désactive, certaines parties reprenant leur potentiel de repos ; la fibre est assimilable à un dipôle, dit « de restauration », opposé au dipôle d'excitation.

En généralisant ce fonctionnement à l'ensemble des fibres du cœur et si on mesure le potentiel à une distance grande devant la distance qui sépare les dipôles élémentaires, on peut assimiler le cœur tout entier à un seul dipôle variant au cours du temps. Les électrodes sont placées sur les épaules gauche et droite et sur le pubis, l'ensemble pouvant grossièrement être assimilé à un triangle équilatéral dont le cœur serait le barycentre. En mesurant et enregistrant (électrocardiogramme) au cours du temps les différences de potentiel entre ces points, on reconstitue l'évolution du dipôle cardiaque. En comparant les allures de ces spectres à celles d'un cœur sain ou affecté de diverses pathologies, cette technique est un outil de diagnostic efficace.

Exercices

1 Considérons une distribution de trois charges ponctuelles alignées sur l'axe $x'x$: une charge négative $-2q$ est située à l'origine O et les deux charges positive q sont situées de part et d'autre en $x = -a$ et $x = +a$. L'ensemble est appelé « quadrupôle linéaire ». Soit P un point quelconque repéré par sa distance r à l'origine et par l'angle θ entre OP et l'axe $x'x$.

a. Calculer le potentiel créé en P par cette distribution en fonction de q, r, a et θ dans le cas où P est suffisamment loin de O pour que r soit très grand devant a.

b. En déduire le champ électrique en P dans ces conditions.

c. Cette distribution présente-t-elle un moment dipolaire ?

2 Un quadrupôle électrique est formé de quatre charges ponctuelles placées aux sommets d'un carré ABCD de centre O et de côté égal à a : deux charges positives sont situées en A et C, deux charges négatives en B et D.

a. Calculer le potentiel en un point M quelconque situé à une distance r du centre O du carré, en

fonction de a, q et θ l'angle entre OM et la droite AC. Simplifier l'expression obtenue en supposant $r \gg a$.

b. Donner l'expression du champ électrique en M.

3 Une charge est uniformément répartie le long d'un segment de droite de centre O et de longueur a, dirigé selon un axe Oz.

a. Montrer que le potentiel V en un point M de coordonnées x, y, z s'exprime en fonction de la distance de M à O par :

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a} \ln \frac{\sqrt{r^2 - az + a^2/4} + a/2 - z}{\sqrt{r^2 + az + a^2/4} - a/2 - z}$$

b. Donner l'expression du terme monopolaire V_1, montrer que le terme dipolaire $V_2 = 0$ et que terme quadrupolaire V_3 est tel que

$$V_3 = (Qa^2/96\pi\varepsilon_0 r^3)(3\cos^2\theta - 1)$$

c. Pour quelle distance r au centre de la charge, le moment quadrupolaire est-il inférieur au centième du terme monopolaire ?

d. Retrouver V_1 et V_2 en développant l'expression de V jusqu'au terme en $\frac{1}{r^2}$.

4 **a.** On rapproche les deux distributions de densités volumiques $+\rho$ et $-\rho$ de l'exercice 3 (figure ci-dessous à gauche) afin qu'elles se superposent presque complètement. On a représenté ci-dessous (droite) une coupe à z donné ; les deux centres de distributions O et O′ sont distants de l où $l \ll a$ (l peut être choisi arbitrairement petit, le produit ρ restant constant).

• Montrer que la distribution de charges obtenue peut être vue comme une distribution superficielle le long de la surface extérieure de ce nouveau cylindre, de densité $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$, où θ est l'angle d'un rayon avec l'axe de symétrie dans le plan $z =$ Cte de la distribution. Donner l'expression de σ_0 en fonction des données du problème.

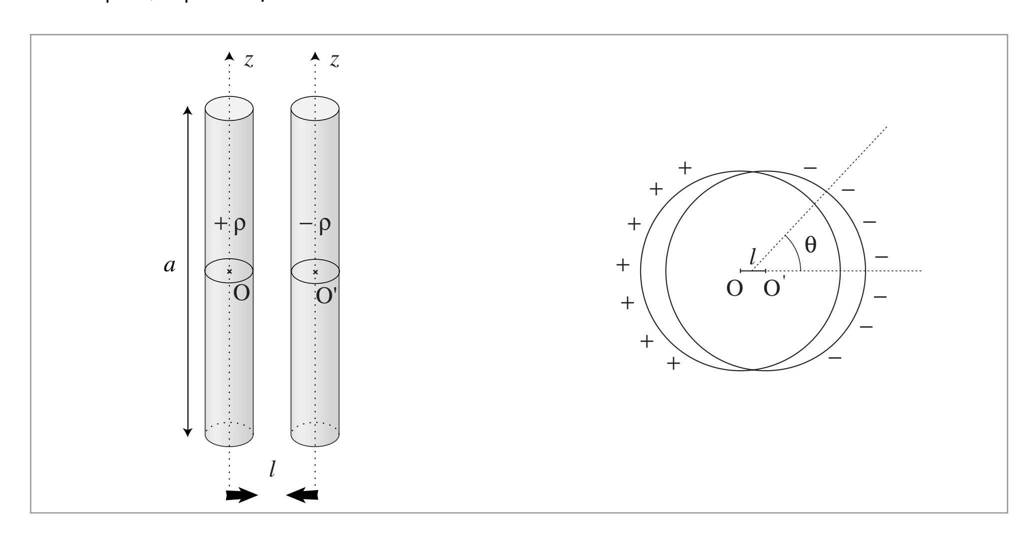
• Calculer le champ et le potentiel en tout point de l'espace à l'intérieur et à l'extérieur de la distribution $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$. Montrer que le champ (ou le potentiel) à l'extérieur de la distribution de charges est dû à une chaîne infinie de dipôles.

• Calculer le module du moment dipolaire par unité de longueur de cette chaîne de dipôles et préciser son orientation. Comparer les expressions de $\vec{E}$ et de V à celles obtenues pour un dipôle constitué de deux charges $+q$ et $-q$ séparées par la distance l.

• Vérifier la valeur de la discontinuité de la composante normale du champ à la traversée de la nappe superficielle de densité σ ainsi que la continuité de la composante tangentielle.

b. On place maintenant une distribution superficielle cylindrique de rayon R telle que $\sigma = \sigma_0 \cos\theta$ pour $r = R$ dans le champ uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ où E_0 est choisi pour que le champ à l'intérieur du cylindre soit nul.

Calculer la nouvelle distribution de potentiel en tout point extérieur à la distribution ; on choisira l'origine des potentiels sur la surface de la distribution.



Chapitre 6

Conducteurs à l'équilibre

Les conducteurs présentent la particularité de posséder des charges électriques libres de se déplacer très rapidement dans tout le matériau. Cette caractéristique leur confère des propriétés électrostatiques spécifiques que nous détaillerons dans ce chapitre. Nous décrirons les propriétés liées à un ensemble de conducteurs à l'équilibre et introduirons les notions de capacités et capacités mutuelles. Enfin les méthodes permettant de calculer les champs électriques et les potentiels à l'extérieur d'un système de conducteurs à l'équilibre seront discutées, en particulier la méthode dite des images.

6.1 Définition d'un conducteur

6.2 Conducteur à l'équilibre

1 Un conducteur à l'équilibre est une équipotentielle

2 Distribution de charges : charges de surface

3 Champ électrique au voisinage d'un conducteur à l'équilibre

6.3 Capacité d'un conducteur unique isolé

6.4 Phénomènes d'influence

1 Charges par influence

2 Théorème des éléments correspondants

3 Influence totale

4 Effet d'écran

6.5 Ensemble de conducteurs à l'équilibre

1 États d'équilibre d'un système de conducteurs

2 Capacité et capacité mutuelle

6.6 Condensateurs et groupement de condensateurs

1 Définition d'un condensateur

2 Groupement de condensateurs

6.7 Champ et potentiel à l'extérieur d'un système de conducteurs à l'équilibre

1 Problèmes de Dirichlet - Problème de Neumann

2 Méthode des « images »

Mots-clés

- **Conducteur à l'équilibre**
- **Capacité**
- **Capacité mutuelle**
- **Condensateur**

6.1. Définition d'un conducteur

Définition : **Un conducteur est un corps dans lequel il existe un grand nombre de charges électriques qui sont susceptibles de se déplacer librement.**

Les conducteurs les plus connus sont les métaux. Il existe aussi des électrolytes, système dans lesquels des ions libres peuvent se déplacer. Nous n'en parlerons que ponctuellement, les résultats présentés dans les paragraphes suivants étant tout à fait généraux et applicables à cette classe de matériaux.

Revenons à la description microscopique d'un métal. Dans un métal monovalent comme le cuivre ($Z = 29$) ou le sodium ($Z = 11$) il y a un électron libre par atome ; dans les métaux divalents comme le calcium ($Z = 20$) il y a deux électrons libres par atome. Ces électrons, dits de conduction, ne sont plus associés à un noyau particulier mais sont libres de se déplacer d'un bout à l'autre du métal. Un conducteur peut donc être considéré comme un réseau d'ions positifs, rigidement liés les uns aux autres, ne pouvant que vibrer autour de leur position d'équilibre et d'un gaz d'électrons libres de se déplacer. Ces électrons de conduction sont en très grand nombre, leur densité n est de l'ordre de 10^{30} électrons/m^3 et leur vitesse moyenne est de quelques milliers de km/s.

Les conducteurs métalliques se caractérisent donc par une grande quantité d'électrons pouvant se déplacer librement et très rapidement dans le matériau. Cette spécificité des conducteurs est à l'origine de propriétés électrostatiques particulières, propriétés que nous allons maintenant étudier.

Recheche & Développement

Activité d'une solution électrolytique

Les solutions électrolytiques (solutions de sels, de bases et d'acides) sont constituées d'ions ou de particules chargées électriquement : les unes positivement, les cations, les autres négativement, les anions, ces charges sont libres de se mouvoir dans la solution.

Si l'on se place à l'échelle microscopique, la répartition uniforme des charges et l'électroneutralité de la solution ne sont pas respectées. Au voisinage d'un ion positif, il y a davantage d'ions négatifs que d'ions positifs (voir le calcul de la longueur de Debye). Tout ion devra donc se déplacer avec son environnement, son mouvement étant d'autant plus difficile que la concentration de l'électrolyte sera importante. Ainsi les forces électrostatiques entre les différents constituants de l'électrolyte empêchent-elles leurs mouvements « libres », ces forces ne permettent pas aux électrolytes de se comporter comme des solutions ordinaires.

Pour prendre en compte ces effets, il conviendra pour bon nombre de propriétés (diffusion, pression osmotique...), de décrire un électrolyte de concentration C comme une solution ordinaire de concentration A, dite activité de l'électrolyte, la concentration C et l'activité A étant reliées par la relation $A = \gamma C$.

À titre d'exemple, nous pouvons considérer une solution de NaCl :

concentration de Na^+ (g/l)	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}
activité de Na^+ (g/l)	$0,9\,10^{-3}$	$0,8\,10^{-2}$	$0,7\,10^{-1}$

Comme nous pouvons le remarquer le coefficient γ tend vers 1 lorsque la concentration C tend vers 0.

6.2. Conducteur à l'équilibre

Commençons par étudier le cas d'un conducteur unique, c'est-à-dire isolé dans l'espace. Nous supposerons dans la suite de l'exposé que ce conducteur est homogène et à température uniforme. Par définition, ce conducteur est à l'équilibre si la vitesse moyenne de ses électrons libres par rapport au réseau d'ions est nulle. Cette définition est associée à un comportement à l'échelle macroscopique du système d'électrons. Tout se passe comme si les électron n'étaient soumis à aucune force macroscopique. Bien entendu, à l'échelle microscopique les électrons demeurent mobiles et entrent perpétuellement en collision.

1 Un conducteur à l'équilibre est une équipotentielle

La définition précédente d'un conducteur à l'équilibre permet d'en établir une seconde, équivalente. Nous allons montrer que l'ensemble des points d'un conducteur à l'équilibre ne peuvent être qu'à un seul et même potentiel électrostatique, Par la suite, cette propriété constituera la nouvelle définition d'un conducteur à l'équilibre.

Selon la définition, un conducteur est à l'équilibre si ses électrons libres, dans leur ensemble, ne sont soumis à aucune force macroscopique. Puisque nous ne considérons ici que des conducteurs homogènes et à température uniforme, ceci revient à dire que le champ électrique macroscopique à l'intérieur du conducteur est nul :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{0}$$

Puisque ce champ électrique dérive d'un potentiel $V(\vec{r})$, on a :

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} V(\vec{r}) = \vec{0}$$

ceci revient à dire que le potentiel électrostatique est le même en tous points du conducteur :

$$V(\vec{r}) = \text{Cte}$$

Ceci constitue la propriété fondamentale d'un conducteur à l'équilibre.

Approfondissement

Lorsque nous avons étudié la longueur d'écrantage au chapitre 4, nous avons vu que la distribution d'équilibre est associée à un champ électrique non nul dans l'électrolyte sur une épaisseur de l'ordre de la longueur de Debye. L'équilibre ne peut donc pas être caractérisé par le champ électrique nul dans le matériau comme le suggère notre démonstration, il doit en fait être caractérisé par un potentiel constant dans tout le matériau. Toutefois, dans le cas des métaux, l'approximation que nous avons faite est justifiée, la longueur de Debye D correspondant à l'extension du domaine d'existence de ce champ non nul étant de l'ordre de l'Å, dimension d'un seul atome.

2 Distribution de charges : charges de surface

L'équilibre d'un conducteur impose une certaine forme de distribution de charges dans le conducteur. En effet, selon le théorème de Gauss, la condition d'équilibre $\vec{E} = 0$

implique que la charge électrique totale (électrons et ions) à l'intérieur d'un conducteur soit nulle :

$$\rho_{\text{int}} = 0$$

Cette caractéristique d'un conducteur à l'équilibre s'applique aussi bien à un conducteur chargé qu'à un conducteur neutre. Ainsi, lorsque le conducteur est chargé, la condition d'équilibre impose aux charges de se localiser au voisinage de la surface du conducteur. Sur quelle épaisseur ? Nous avons étudié au chapitre 4 la distribution de charges à l'équilibre d'un électrolyte et montré qu'elle s'étendait sur une longueur caractéristique de l'ordre de la longueur de Debye D. Un métal n'est pas un électrolyte, toutefois les conclusions concernant les distributions de charges sont qualitativement les mêmes puisque, comme les ions en solution de l'électrolyte, les électrons de conduction sont libres de se déplacer. Dans le cas des métaux, la longueur de Debye, inversement proportionnelle à la racine carré de la concentration en électrons libres, est de l'ordre de l'angström, c'est-à-dire de l'ordre de l'épaisseur du premier plan atomique du métal.

Ainsi, à l'équilibre, les charges électriques d'un conducteur chargé se répartissent à la surface du métal, la distribution de charges étant caractérisée par une densité surfacique σ.

3 Champ électrique au voisinage d'un conducteur à l'équilibre

Le champ électrique est normal à la surface du conducteur

La condition d'équilibre imposant une distribution surfacique de charge, une question nouvelle se pose alors. Comment les charges se distribuent-elles sur la surface ? Le détail de la distribution dépend de la forme du conducteur. Toutefois, puisque le conducteur est à l'équilibre, cette distribution doit être telle que l'action macroscopique de l'ensemble des électrons sur l'un d'entre eux soit nulle. En d'autres termes, la composante tangentielle du champ électrique à la surface du conducteur doit être nulle. Par ailleurs, nous avons vu au chapitre 3 que la composante tangentielle du champ électrique devait se conserver lors de la traversée d'une surface chargée. Elle est donc nulle au voisinage immédiat de la surface d'un conducteur et le champ est nécessairement normal à cette surface.

Intensité du champ électrique au voisinage de la surface

Pour calculer l'intensité du champ électrique juste à l'extérieur du conducteur, nous appliquerons le théorème de Gauss à un élément de surface du conducteur. Considérons un cylindre de base infinitésimale, d'axe normal à la surface du conducteur et situé de part et d'autre de cette surface (fig. 6.1).

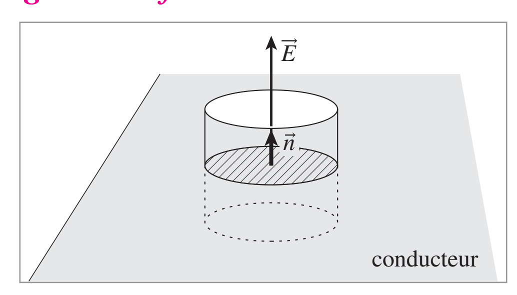


Fig. 6.1. Champ électrostatique à la surface d'un conducteur.

Le champ étant normal à la surface, le flux à travers la surface latérale est nul ; le champ à l'intérieur du conducteur étant nul, sa contribution l'est également : le flux total n'est dû qu'à la contribution du champ

extérieur. L'intensité de ce champ électrique est donc simplement liée à la densité de charges se trouvant en surface par la relation :

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(\vec{r})\vec{n}, \quad E(\vec{r}) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \tag{6.1}$$

À titre d'exemple, le champ électrique au voisinage de la Terre, qui vaut environ 100 V/m, correspond à une densité surfacique de charges de l'ordre de 10^{-9} C/m^2 soit 10^{10} électrons/m^2, densité de charge qui correspond à l'excédent d'un électron pour une surface de 10 μm^2.

Recheche & Développement

Effet de pointe

Lorsque les conducteurs présentent une courbure très grande, la densité de charges accumulées à la surface est très importante (effet de pointe). Certaines de ces charges sont « capturées » par les molécules de l'air passant près de la pointe, ces molécules chargées sont alors repoussées par la pointe puisque leurs charges sont du même signe. Il en résulte un courant d'air qui peut être simplement mis en évidence en présentant une pointe électrisée au voisinage de la flamme d'une bougie, la flamme est alors fortement inclinée par le courant d'air et peut même s'éteindre.

6.3. Capacité d'un conducteur unique isolé

Un conducteur à l'équilibre peut donc être caractérise soit par la charge électrique qu'il porte, soit par son potentiel (mesuré par rapport à un potentiel de référence préalablement fixe).

Supposons un conducteur unique isolé chargé, de surface S, caractérisé par une distribution surfacique de charges σ. La charge totale Q du conducteur est :

$$Q = \iint_S \sigma \, \mathrm{d}S$$

l'intégration se faisant sur la surface S du conducteur.

Par ailleurs si on calcule le potentiel V sur le conducteur, en prenant pour référence $V(\infty) = 0$, le théorème de Coulomb nous donne l'expression :

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')\,\mathrm{d}S}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|}$$

Sur ces deux expressions, nous voyons que si nous chargeons le conducteur avec une charge kQ, la distribution de charges correspondante sera égale à $k\sigma$. En vertu du théorème de superposition, le potentiel correspondant à l'équilibre sera alors égal à kV. Il existe ainsi une relation de proportionnalité entre la charge et le potentiel pour un conducteur :

$$Q = CV \tag{6.2}$$

Dans cette expression le coefficient C est appelé « capacité du conducteur » (ne pas confondre avec la capacité d'un condensateur sur laquelle nous reviendrons au paragraphe 6.6). Ce coefficient est indépendant de l'état de charge du conducteur, il ne dépend que de sa forme et de ses dimensions. L'unité des capacités est le farad (F), l'ordre de grandeur des capacités usuelles va du microfarad (10^{-6} F) au picofarad (10^{-12} F).

Calculons par exemple la capacité d'une sphère métallique isolée de rayon R sur laquelle on introduit une charge Q. La sphère étant conductrice, le champ est nul à l'intérieur de la sphère et le potentiel V, repéré par rapport à l'infini est constant et donc égal en tous points au potentiel $V(R)$ à la surface :

$$V(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

On peut alors définir la capacité C qui ne dépend que du rayon de la sphère :

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 R$$

Pour reprendre l'exemple du paragraphe précédent, la capacité associée à la Terre est d'environ 10^{-3} F. Grâce à cette capacité, la Terre peut ainsi jouer le rôle de réservoir de charges.

6.4. Phénomènes d'influence

Nous venons de décrire l'équilibre d'un conducteur unique ; toutefois dans la plupart des situations physiques intéressantes, un conducteur n'est pas isolé mais est entouré d'autres conducteurs. L'équilibre d'un conducteur particulier dépend alors de toutes les charges qui l'entourent et c'est l'équilibre de l'ensemble du système qu'il convient de considérer.

Avant d'étudier en détail les systèmes de conducteurs à l'équilibre (paragraphe 6.5), nous allons décrire qualitativement les phénomènes apparaissant lorsque plusieurs conducteurs chargés sont mis en présence. Ces phénomènes sont connus sous le nom de phénomènes d'influence.

Pour commencer, nous allons étudier le cas d'un conducteur neutre placé dans le champ électrique créé par d'autres conducteurs en négligeant dans un premier temps l'effet de ce conducteur sur le champ électrique auquel il est soumis.

1 Charges par influence

Supposons donc un conducteur isolé neutre. Rappelons que par conducteur neutre, nous devons entendre un conducteur dans lequel il y a autant de charges ioniques positives que d'électrons libres. Si nous soumettons un tel conducteur à un champ électrique extérieur, ce champ induira le déplacement d'ensemble instantané des électrons libres dans une direction opposée à l'orientation du champ extérieur. Le nombre total de charges restant constant, certaines régions du conducteur deviendront excédentaires en électrons tandis que d'autres en seront déficitaires. On dit conventionnellement qu'il y a « apparition par influence » de charges négatives et positives dans le conducteur.

Soulignons encore une fois que le terme « apparition de charges » est impropre, le conducteur étant isolé, il y a conservation de la charge totale, il n'y a en fait qu'une simple redistribution des charges dans le conducteur. Si le conducteur n'est pas isolé mais relié à un générateur de tension qui maintient son potentiel V constant, sous l'influence du champ extérieur, il apparaîtra des charges provenant de la « source » de potentiel (la source pouvant éventuellement être la « Terre » maintenant le conducteur au potentiel nul). Si cette source est ensuite déconnectée du conducteur, cette charge restera sur le conducteur lorsque le champ électrique influençant sera retiré. Cette procédure peut être utilisée pour charger un conducteur.

Un peu d'histoire

Paratonnerre

Le paratonnerre de Franklin est une tige métallique, terminée par une pointe inoxydable dressée sur les parties les plus élevées des édifices que l'on veut protéger de la foudre. Cette tige est reliée au sol par un câble métallique dont l'extrémité est enfoncée profondément en terre. Lorsqu'un nuage électrisé passe au dessus de l'édifice, il induit par influence des charges de signe opposé dans la pointe du paratonnerre. Si le nuage est proche, cette charge sera importante et conduira par effet de pointe à l'existence de champ électrique très important. Au-delà d'un certain seuil, ce champ électrique pourra induire une décharge électrique entre le nuage et la pointe du paratonnerre, des charges électriques seront alors échangées entre le nuage et la Terre pour neutraliser la charge contenue dans le nuage. L'édifice sera ainsi préservé de la foudre.

2 Théorème des éléments correspondants

Supposons maintenant que le champ électrique extérieur appliqué sur le conducteur A soit créé par le conducteur chargé B (fig. 6.2).

Considérons un tube de lignes de champ (voir chapitre 2) partant de A pour aboutir en B. Ce tube découpe sur A et B deux éléments de surface $\mathrm{d}S_\mathrm{A}$ et $\mathrm{d}S_\mathrm{B}$ que l'on appelle « éléments correspondants ». Appliquons le théorème de Gauss à la surface constituée par ce tube de lignes de champ que nous fermerons par deux surfaces quelconques passant à l'intérieur des conducteurs A et B. Le flux du champ électrique à travers la surface latérale est nul puisque par définition le champ électrique est tangent à ces lignes de champ ; de plus, aucune contribution au flux total ne provient du champ à l'intérieur des conducteurs puisqu'il est nul. Nous pouvons donc en conclure que la charge totale contenue à l'intérieur de la surface de Gauss est nulle. Ainsi, la charge $\sigma_\mathrm{A}\,\mathrm{d}S_\mathrm{A}$ portée par l'élément de surface $\mathrm{d}S_\mathrm{A}$ du conducteur A est égale et opposée à celle portée par l'élément correspondant sur B :

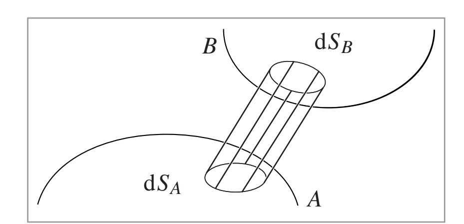


Fig. 6.2. Éléments correspondants de deux conducteurs en influence mutuelle.

$$\sigma_\mathrm{B}\,\mathrm{d}S_\mathrm{B} = -\sigma_\mathrm{A}\,\mathrm{d}S_\mathrm{A}$$

Ce résultat constitue le théorème des éléments correspondants.

Les éléments de surface d'un conducteur n'ont pas toujours d'élément correspondant (ou alors à l'infini sur une surface fictive), certaines lignes de champ pouvant se perdre à l'infini (fig. 6.3).

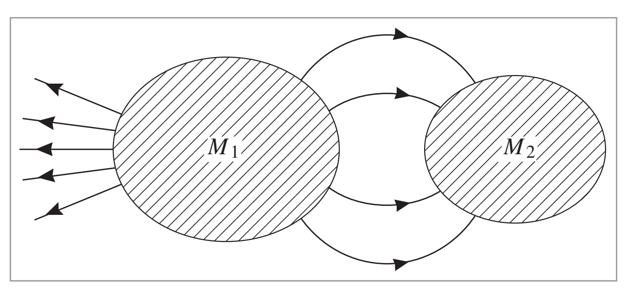


Fig. 6.3.

En revanche, si les charges de deux conducteurs sont égales et opposées, toutes les lignes de champ partiront de l'un des conducteurs pour aboutir à l'autre. Il en sera de même pour un nombre quelconque de conducteurs dont la charge totale est nulle ; il n'y aura alors aucune ligne de champ qui se dirigera vers ou proviendra de l'infini.

3 Influence totale

Nous dirons que deux conducteurs sont en « influence totale » lorsque l'un des conducteurs entoure entièrement l'autre (fig. 6.4). Dans ce cas, en supposant par exemple que le potentiel du conducteur intérieur soit le plus élevé, toutes les lignes de champ partiront de ce conducteur pour arriver sur la surface intérieure du conducteur creux.

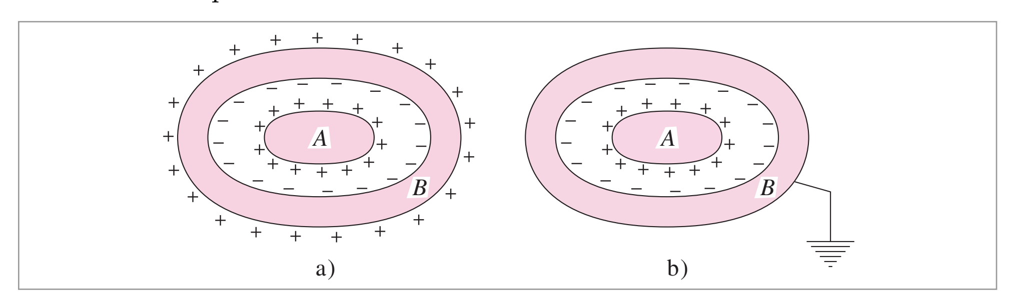


Fig. 6.4. Distributions des charges sur les surfaces de conducteurs en influence totale : **a) le conducteur extérieur étant isolé ; b) le conducteur extérieur étant relié à la Terre.**

Le théorème des éléments correspondants nous indique que, dans cette situation, la charge portée par la surface intérieure du conducteur creux est nécessairement égale et opposée à la charge du conducteur intérieur. Ce résultat se généralise au cas de plusieurs conducteurs en influence mutuelle lorsque la somme des charges est nulle.

4 Effet d'écran

L'utilisation pratique des conducteurs en influence totale se manifeste dans deux domaines ; celui des condensateurs que nous étudierons en détail au paragraphe 6.6 et celui lié aux problèmes d'isolation électrostatique, connu sous le nom d'effet d'écran que nous allons discuter maintenant.

Supposons donc que l'un des conducteurs entoure totalement l'autre (fig. 6.4.a). Si le conducteur A porte le charge $+Q$, la surface intérieure du conducteur B verra « apparaître » une charge $-Q$ en vertu du théorème des éléments correspondants. La conservation de la charge totale du conducteur B neutre impose qu'il apparaisse sur la surface extérieure de B une charge $+Q$. Si B portait initialement la charge q, il porte alors la charge $Q + q$.

Si maintenant nous connectons la surface extérieure de B à un très grand réservoir de charges, la Terre par exemple, les charges se trouvant sur cette surface extérieure s'écoulent dans le sol. Vu de l'extérieur de B, le système constitué des conducteurs A et B apparaît comme un système neutre (fig. 6.4.b). La présence d'une charge en A est indécelable au delà de l'enveloppe externe du conducteur B. On dira que le conducteur B est équivalent à un écran électrique.

L'effet d'écran est bien entendu efficace dans les deux sens. En particulier les charges sur le conducteur A sont protégées de l'influence de champs extérieurs. Cet aspect est particulièrement utilisé dans le cadre de blindage d'appareils électriques. Dans un tel dispositif, le conducteur B est appelé « cage de Faraday ».

6.5. Ensemble de conducteurs à l'équilibre

Considérons maintenant un système constitué de plusieurs conducteurs en influence mutuelle. Nous pouvons nous demander comment décrire l'état d'équilibre d'un tel système. Dans ce paragraphe, nous ne présenterons que les procédures permettant de déterminer les potentiels et les charges associés à chaque conducteur. La détermination du potentiel et du champ électrique en tout point de l'espace entre les conducteurs doit être traité différemment. Nous reviendrons au paragraphe 6.7 sur ces méthodes qui consistent à résoudre l'équation de Laplace avec les conditions aux limites adéquates.

1 États d'équilibre d'un système de conducteurs

L'équilibre d'un système de conducteurs, repérés par l'indice i, est caractérisé par l'ensemble des valeurs des charges (Q_i) et des potentiels (V_i) associés à chacun des conducteurs i. Considérons donc un tel équilibre, c'est-à-dire supposons connu l'ensemble des (Q_i) et (V_i). Modifions ce système en ajoutant par exemple des charges ou en faisant varier le potentiel sur un ou plusieurs conducteurs. Sous l'influence des forces électriques ainsi créées, les électrons vont se redistribuer jusqu'à ce que le système soit de nouveau à l'équilibre. Ce nouvel équilibre sera caractérisé par un ensemble de charges et potentiels (Q_i') et (V_i'). Le principe de superposition nous dit que l'état correspondant à $(Q_i + Q_i')$ et $(V_i + V_i')$ est un état d'équilibre : la superposition de deux états d'équilibre est également un état d'équilibre. Comme nous allons le voir, ce résultat est très utile dans l'étude des conducteurs à l'équilibre.

2 Capacité et capacité mutuelle

Cette notion d'équilibre d'un système constitué de plusieurs conducteurs en influence totale étant précisée, nous pouvons maintenant généraliser la notion de capacité introduite dans le cas d'un conducteur isolé.

Considérons un ensemble de conducteurs (i). Portons le conducteur 1 au potentiel V_1 en maintenant tous les autres conducteurs au potentiel nul. Il apparaîtra des charges sur tous les conducteurs. Ces charges seront proportionnelles au potentiel V_1, la charge sur le conducteur i sera notée $C_{i1}V_1$. Si nous réitérons l'opération en fixant maintenant V_2 et en annulant tous les autres potentiels, nous aurons des charges qui s'écriront $C_{i2}V_2$. Nous pouvons reproduire cette procédure pour chacun des conducteurs en les portant successivement aux potentiels V_i tout en maintenant tous les autres au potentiel nul. Chacun de ces états est un état d'équilibre. Si maintenant nous portons simultanément le conducteur 1 au potentiel V_1, le conducteur 2 au potentiel V_2... Le nouvel état d'équilibre correspond à la superposition des états d'équilibre précédents. Le principe de superposition permet d'écrire que la charge Q_i développée sur le conducteur i est égale à :

$$Q_i = \sum_j C_{ij} V_j \tag{6.3}$$

Dans cette expression, les coefficients C_{ij} ne dépendent que de la géométrie des conducteurs et de leurs positions relatives. Le coefficient C_{ii} est positif, il représente la capacité du conducteur i en présence des autres conducteurs. Notons que cette capacité est différente de la capacité du conducteur isolé. Les coefficients C_{ij} dits « capacités mutuelles », sont négatifs et correspondent aux coefficients d'influence du conducteur i sur le conducteur j. Par ailleurs, on peut montrer que :

$$C_{ij} = C_{ji}$$

6.6. Condensateurs et groupement de condensateurs

1 Définition d'un condensateur

Nous dirons que deux conducteurs forment un condensateur lorsque l'un des conducteurs entoure l'autre (fig. 6.5). Ils sont alors en influence totale. L'un des conducteurs sera l'armature externe du condensateur tandis que l'autre sera l'armature interne (le plus célèbre des condensateurs est la fameuse bouteille de Leyde, un flacon en verre rempli de copeaux métalliques et dont la surface externe était métallisée (voir chapitre 1).

Capacité d'un condensateur

Que peut-on alors dire des caractéristiques de l'équilibre électrostatique du système ? Les

relations générales que nous avons établies, nous permettent d'écrire :

$$Q_1 = C_{11}V_1 + C_{12}V_2$$
$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2$$

Ces relations doivent être vérifiées quel que soit le potentiel V_2, en particulier pour $V_2 = 0$ (le conducteur externe creux est relié à la Terre). Dans ce cas, les deux conducteurs étant en influence totale, nous avons la relation :

$$Q_1 = -Q_2$$

ce qui implique que :

$$C_{11} = -C_{21} = -C_{12}$$

Puisque les coefficients C_{ij} ne dépendent que de la configuration géométrique du système, cette relation est encore vraie lorsque le conducteur creux est maintenu au potentiel V_2 non nul.
Nous obtenons ainsi :

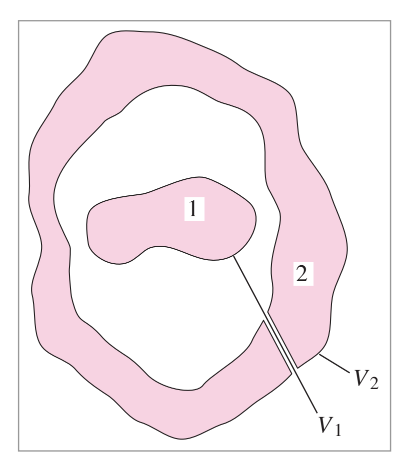


Fig. 6.5. Condensateur.

$$Q_1 = C_{11}(V_1 - V_2) = C(V_1 - V_2) \tag{6.4}$$

en ayant posé $C_{11} = C$. Le coefficient C est appelé la « capacité du condensateur ». Notons que la charge Q_2 est alors égale à :

$$Q_2 = C_{21}V_1 + C_{22}V_2 = -C_{11}V_1 + C_{22}V_2 = -C(V_1 - V_2) + (C_{22} - C)V_2$$

Dans cette expression, le premier terme correspond à la charge directement en regard de l'armature interne tandis que la seconde contribution correspond à la charge sur la surface externe de l'armature creuse.

Pour des formes géométriques simples, la capacité est facile à calculer comme nous allons le montrer sur quelques exemples.

Un peu d'histoire

Condensateur

Cavendish avait défini la capacité (du latin *capax* voulant dire « qui peut contenir ») d'un condensateur et son degré d'électrification, qui correspond au potentiel électrique à ses bornes.

Capacité d'un condensateur sphérique

Entourons une sphère de rayon R d'un deuxième conducteur sphérique creux de rayon intérieur R' ($R < R'$) et introduisons une charge $+Q$ sur la sphère intérieure (fig. 6.6).

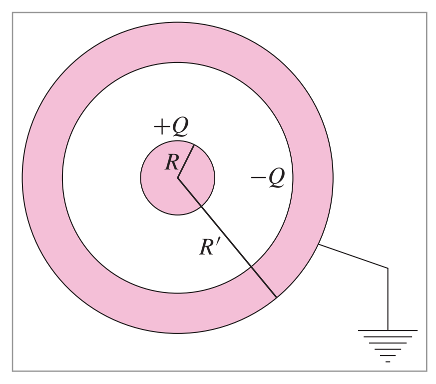


Fig. 6.6. Condensateur sphérique.

La surface intérieure du conducteur extérieur se charge par influence, sa charge totale est $-Q$. Calculons la différence de potentiel entre les deux armatures en commençant par déterminer le champ électrique. La symétrie du système impose à ce champ d'être radial, le théorème de Gauss nous permet de calculer son module (voir 3.5) :

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{u}_\mathrm{r}$$

Nous pouvons alors calculer $V(R) - V(R')$:

$$\mathrm{d}V = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\mathrm{d}r$$

puis en intégrant entre R' et R, nous obtenons :

$$V(R) - V(R') = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{R'}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R'-R}{RR'}$$

En comparant cette équation à la relation 6.4, nous obtenons la capacité C d'un tel condensateur sphérique :

$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R'R}{R'-R}$$

Si $(R'-R)$ est plus petit que R, cette capacité est plus grande que celle de la sphère isolée de rayon R. Ce résultat souligne l'intérêt que présente l'utilisation de tels condensateurs. Évaluons l'ordre de grandeur d'une telle capacité. Pour un condensateur sphérique tel que $R = 1$ cm, $R' = 1,1$ cm, nous obtenons $C \simeq 10^{-11}$ F.

Capacité d'un condensateur plan

Envisageons maintenant le cas du système schématisé figure 6.7 constitué de plaques conductrices infinies parallèles A et B, séparées par la distance h, et appliquons une différence de potentiel en les maintenant respectivement aux potentiels V_A et V_B ($V_\mathrm{A} > V_\mathrm{B}$).

À proprement parler, ce système ne rentre pas dans notre définition générale d'un condensateur, toutefois les plaques étant de dimensions latérales infinies, la région entre les plaques est isolée de l'extérieur et les deux plans peuvent malgré tout être considérés

comme étant en influence totale. Il apparaît sur chacune des surfaces intérieures des plaques des charges surfaciques de densités uniformes σ_A et σ_B égales et opposées :

$$\sigma_A = -\sigma_B = \sigma \quad (\sigma > 0)$$

Par symétrie, le champ électrique à l'intérieur du condensateur est normal aux surfaces et son module ne dépend a priori que de la coordonnée z (voir 3.5). Pour le déterminer, considérons par exemple la surface de Gauss constituée d'un cylindre d'axe Oz, fermé par deux surfaces S_1 et S_2 parallèles aux plaques, l'une dans le conducteur l'autre située n'importe où entre les armatures. Le flux du champ électrique à travers cette surface est alors simplement égal à la contribution du flux du champ traversant S_2 :

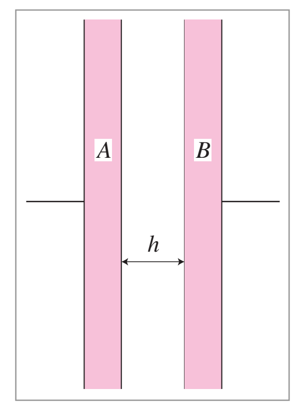


Fig. 6.7. Condensateur plan.

$$\Phi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot S_2 \vec{u}_z = E_z(z) S_2 = \frac{\sigma_A S_2}{\varepsilon_0}$$

$$E_z(z) = \frac{\sigma_A}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$

Par ailleurs, puisque le champ dérive du potentiel, nous pouvons écrire :

$$\mathrm{d}V = -E_z(z)\,\mathrm{d}z$$

$$V_A - V_B = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}(z_A - z_B) = \frac{\sigma_A h}{\varepsilon_0}$$

Des plans conducteurs infinis n'existent pas bien entendu dans la réalité, toutefois ce système modélise correctement tout condensateur constitue de deux plaques de surface S dont les dimensions latérales sont grandes devant l'épaisseur h : dans ces conditions, les corrections concernant l'orientation et l'intensité du champ dues aux dimensions finies du condensateur, notamment près des bords, deviennent négligeables (ces effets de bords ne font qu'augmenter la charge Q à potentiel V donné, la formule de la capacité obtenue dans cette approximation sous-estime la valeur de la capacité réelle). Pour un tel système, nous pouvons donc écrire :

$$V_A - V_B = \frac{\sigma h}{\varepsilon_0} = \frac{Qh}{S\varepsilon_0}$$

Nous en déduisons la capacité C d'un tel condensateur :

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}$$

Cette capacité est d'autant plus grande que S est grand et h petit. Dans le vide toutefois, une distance h trop faible peut favoriser la présence entre les plaques d'arcs électriques induisant des processus de décharge. Pour éliminer ces « claquages », il convient d'isoler les plaques en introduisant entre elles un « isolant diélectrique ». Nous verrons au chapitre suivant comment ce « diélectrique », outre sa propriété d'isolant, participe lui-même à l'augmentation de la capacité du condensateur.

Par extension de ce modèle, nous représenterons tous les condensateurs par le schéma conventionnel donné figure 6.8.

Si nous revenons à la définition d'un condensateur donnée en 6.1, dans ce schéma la plaque référencée portant par convention la charge Q représente la surface intérieure du condensateur, l'autre plaque chargée $-Q$ représente la surface intérieure du conducteur en regard, la différence de potentiel est égale par définition à :

$$V_A - V_B = \frac{Q_A}{C} = \frac{Q_{ref}}{C} = \frac{Q}{C}$$

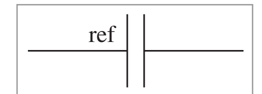


Fig. 6.8. Représentation schématique d'un condensateur.

Un peu d'histoire

Bouteille de Leyde

Les premières expériences d'accumulation de charges électrostatiques ont été réalisées en utilisant un condensateur dénommé « bouteille de Leyde », bouteille conçue pour se remplir de fluide électrique. Il s'agissait d'une bouteille en verre enveloppée d'une feuille métallique, en étain la plupart du temps, remplie de débris métalliques, l'intérieur et l'extérieur étant mis en relation par l'intermédiaire d'une longue tige métallique terminée par une crosse. Il s'agissait là du premier condensateur pouvant supporter des différences de potentiel de l'ordre de 25 000 V.

2 Groupement de condensateurs

Nous allons étudier maintenant l'équilibre de plusieurs condensateurs. La description de cet équilibre dépend de la manière dont ils sont connectés. Ils peuvent être en série, en parallèle, en réseau. Nous nous contenterons ici de décrire les deux premiers cas car ils illustrent parfaitement les principes élémentaires de l'électrostatique.

Fig. 6.9. Condensateurs en parallèle.

Condensateurs en parallèle

Considérons par exemple n condensateurs, de capacités C_1, C_2, C_n... Relions toutes les armatures internes de ces condensateurs au même point A de potentiel V_A et toutes les armatures externes à un autre point B de potentiel V_B.

Dans ce montage présenté figure 6.9, la différence de potentiel $(V_A - V_B)$ est la même pour tous les condensateurs. Nous pouvons donc écrire :

$$V_A - V_B = \frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} = \cdots = \frac{Q_n}{C_n}$$

La charge totale Q supportée par l'ensemble des armatures internes est évidemment égale à la somme des charges accumulées sur tous les condensateurs :

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \cdots + Q_n = (C_1 + C_2 + C_3 + \cdots + C_n)(V_A - V_B)$$

Nous pouvons alors définir la capacité équivalente C d'un tel système :

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \sum_n C_n$$

Condensateurs en série

Considérons le même système de condensateurs mais relions maintenant l'armature externe du condensateur i à l'armature interne du condensateur $i + 1$ (fig. 6.10).

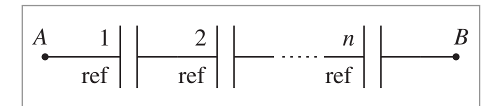


Fig. 6.10. Condensateurs en série.

Appliquons une différence de potentiel $V_A - V_B$ aux bornes de ce montage. L'armature interne du premier condensateur va porter la charge Q et son armature externe $-Q$. Le système constitué de l'armature externe du condensateur 1 et l'armature interne du condensateur 2 est un conducteur isolé, il y a donc conservation de la charge d'un tel système. Par conséquent la charge sur l'armature interne du condensateur 2 est nécessairement égale à Q. Ce raisonnement se généralise à l'ensemble des armatures. Par ailleurs, la continuité du potentiel nous permet d'écrire :

$$V_A - V_B = (V_A - V_{I1}) + (V_{I1} - V_{I2}) + \cdots + (V_{In-1} - V_B)$$

Si nous exprimons chacune de ces contributions en fonction des charges accumulées et des capacités, nous obtenons :

$$V_A - V_B = \frac{Q_1}{C_1} + \frac{Q_2}{C_2} + \frac{Q_3}{C_3} + \cdots + \frac{Q_n}{C_n} = Q \sum_n \frac{1}{C_n}$$

Ainsi un système de condensateurs en série est équivalent à un condensateur dont la capacité C vérifie la relation :

$$\frac{1}{C} = \sum_n \frac{1}{C_n}$$

6.7. Champ et potentiel à l'extérieur d'un système de conducteurs à l'équilibre

Nous venons de voir comment pouvait être décrit l'équilibre d'un conducteur unique isolé ou celui d'un système de conducteurs. Dans ces descriptions, nous nous sommes intéressés plus particulièrement aux charges et aux potentiels sur chacun des conducteurs. Nous allons présenter maintenant les procédures qu'il faudrait mettre en œuvre pour calculer le potentiel et le champ électrique créés par ces conducteurs en tous points de l'espace.

1 Problèmes de Dirichlet - Problème de Neumann

Sous sa forme générale, le problème du calcul du potentiel entre les conducteurs constituant un système à l'équilibre se pose de manière différente selon que les conducteurs

sont caractérisés par leurs potentiels ou par les charges qu'ils portent. Dans les deux cas, il suffit de résoudre l'équation de Laplace (voir chapitre 4) $\nabla^2 V = 0$ mais les conditions aux limites sont spécifiques à chacune de ces situations.

Les conducteurs sont caractérisés par leurs potentiels : problème de Dirichlet

Supposons un ensemble de conducteurs (C_i) portés aux potentiels V_i. La solution de l'équation de Laplace doit satisfaire aux conditions aux limites $V = V_i$ sur les conducteurs. Le champ électrique est ensuite obtenu en appliquant la relation locale $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$. La densité de charges locale en tout point des conducteurs est alors calculée d'après la relation 6.1, $E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$.

Les conducteurs sont caractérisés par leurs charges : problème de Neumann

Nous pouvons également rencontrer des situations dans lesquelles les potentiels sur les conducteurs ne sont pas connus alors que la charge de chacun des conducteurs l'est. Les conditions aux limites fixent alors, non plus le potentiel à la surface des conducteurs mais les valeurs de son gradient puisque la densité de charges σ est proportionnelle à E (relation 6.1).

Nous avons vu au chapitre 4 qu'un potentiel V satisfaisant à l'équation de Laplace et à des conditions aux limites fixées existe, qu'il est unique et seulement déterminé par les conditions aux limites imposées. Ainsi présentés, les problèmes de Dirichlet ou de Neumann, permettant de décrire le potentiel créé par un ensemble de conducteurs à l'équilibre, sont formellement résolu.

Toutefois, la détermination de leurs solutions est en général mathématiquement très difficile. Différentes méthodes ont été développées pour contourner ces difficultés. Nous ne les discuterons pas toutes et nous nous contenterons de présenter ici la « méthode des images » pour souligner la cohérence interne et la simplicité conceptuelle de la démarche (à défaut de la simplicité technique).

2 Méthode des « images »

La méthode des « images » électriques est une méthode très astucieuse qui permet de déterminer le champ électrique et la distribution de charges lorsque plusieurs conducteurs sont en influence mutuelle. Nous ne ferons pas la liste exhaustive de l'ensemble des situations pouvant trouver une solution par cette méthode, nous nous contenterons ici d'en présenter le principe en nous appuyant sur deux exemples simples, ceux d'une charge ponctuelle placée en face d'un plan infini conducteur ou d'une sphère conductrice.

Champ et potentiel créés par une charge ponctuelle et un plan infini conducteur

Plaçons une charge ponctuelle q (par exemple positive) en face d'un plan infini conducteur dont le potentiel est maintenu constant (par exemple $V = 0$) (fig. 6.11).

Par influence, des charges négatives vont « apparaître » sur le conducteur plan. Comment peut-on déterminer cette distribution des charges et calculer en tout point de l'espace le champ électrique et le potentiel correspondant à l'équilibre ainsi obtenu ? Pour répondre à ces questions, nous allons commencer par étudier une autre situation physique. Considérons un dipôle formé par la charge q et une seconde charge $-q$ située en une

position symétrique de q par rapport au plan conducteur (fig. 6.12) ; nous dirons que la charge $-q$ est « l'image » électrique de q. Nous avons calculé au chapitre 5 le champ et le potentiel créés par ce dipôle en tout point de l'espace, en particulier nous avons montré que le plan médiateur du dipôle est la surface équipotentielle qui correspond au potentiel nul.

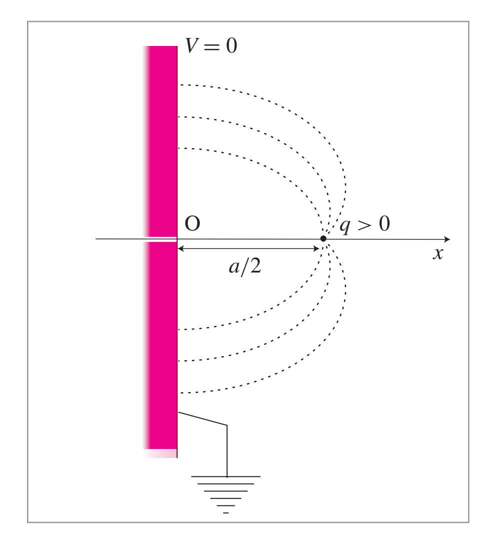


Fig. 6.11. Méthode des images : lignes de champ créées par une charge positive face à une surface métallique.

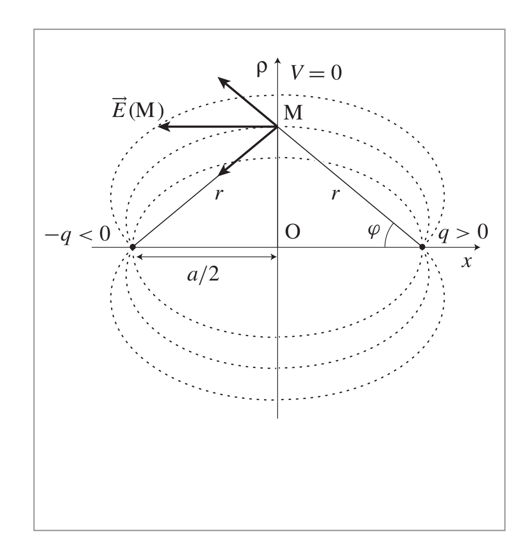


Fig. 6.12. Méthode des images : lignes de champ créées par une charge électrique et son « image ».

Si nous comparons maintenant ces deux problèmes, ils correspondent tous deux à la même situation physique caractérisée par une charge ponctuelle et un plan infini au potentiel nul. D'après le théorème d'unicité des solutions de l'équation de Laplace, ces deux problèmes sont équivalents du point de vue du calcul du potentiel en tous points de l'espace, tout au moins pour la partie hors du plan conducteur. Or, nous connaissons exactement la solution dans le cas du dipôle, nous pouvons donc l'appliquer au cas de la charge placée face à un plan conducteur. Cette méthode est appelée la « méthode des images électriques ».

Pour calculer la densité superficielle de charges sur le plan conducteur, nous procédons selon le même principe. D'après la relation 6.1, cette densité est proportionnelle au champ électrique en tout point du plan. La méthode des images nous permet d'affirmer que ce champ au point M est égal à celui créé par les deux charges du dipôle. Nous avons calculé le champ dans le plan médian au chapitre 5 ; il est normal au plan et tel que :

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = -\frac{2q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\varphi\,\vec{u}_x = \frac{-2qa}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\,\vec{u}_x$$

$\vec{u}_x$ étant un vecteur unitaire dans la direction Ox et les autres notations étant indiquées sur la figure 6.12. Pour le plan conducteur, ce champ électrique est par définition égal à :

$$\vec{E}(\mathrm{M}) = \frac{\sigma(\mathrm{M})}{\varepsilon_0}\,\vec{u}_x$$

σ(M) étant la densité de charges sur le plan au point M. Par identification de ces deux expressions du champ, nous obtenons la densité de charges σ(M) :

$$\sigma(\mathrm{M}) = \frac{-qa}{4\pi\left(\rho^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2\right)^{3/2}} = \frac{-2q}{\pi a^2}\cos^3\varphi$$

ρ correspondant à la distance OM.

Cette distribution présente un maximum pour $\varphi = 0$, c'est-à-dire juste en regard de la charge q. Nous pouvons remarquer également que la charge totale répartie sur le plan conducteur est, comme il se doit, égale à $-q$. En effet,

$$Q' = \iint_S \sigma \,\mathrm{d}S = \int_0^{\infty} 2\pi\sigma(\rho)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

or $\rho = \frac{a}{2}\tan\varphi$ et $\mathrm{d}\rho = \frac{a}{2}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi}$, nous obtenons :

$$Q' = -q\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi = -q$$

Champ et potentiel créés par une charge ponctuelle et une sphère conductrice

Considérons maintenant le système constitué par une sphère conductrice de rayon R, centrée en O, maintenue au potentiel nul et une charge ponctuelle q placée à une distance d de O (fig. 6.13). Conformément à la méthode des images présentée au paragraphe précédent, il nous faut trouver une situation physique qui fait de la sphère une surface équipotentielle.

Supposons donc une charge image q' placée sur l'axe Ox au point d'abscisse x. Les charges q et q' engendrent au point M un potentiel $V(\mathrm{M})$ égal à :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_2}\right)$$

r_1 et r_2 représentant respectivement les distances au point M des charges q et q'. Ce potentiel est nul lorsque :

$$\frac{r_2}{r_1} = -\frac{q'}{q} = \mathrm{Cte}$$

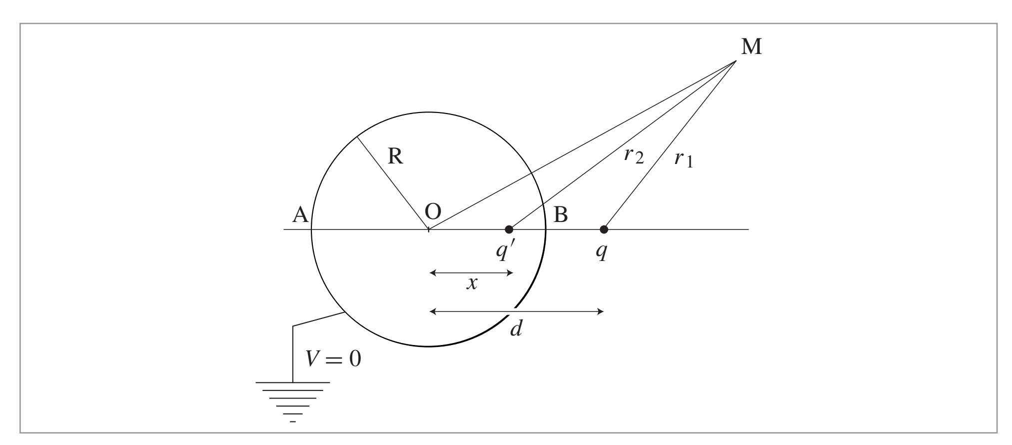


Fig. 6.13. Image d'une charge ponctuelle « dans » une sphère conductrice.

Or précisément la sphère est le lieu géométrique des points dont les distances à deux points fixes sont dans un rapport constant. Ce système de deux charges peut donc rendre compte d'une situation physique dans laquelle une sphère serait l'équipotentielle $V = 0$. Il ne nous reste plus qu'à déterminer q' et x. Il suffit pour cela d'appliquer la relation précédente aux points A et B :

$$\frac{R+x}{R+d} = -\frac{q'}{q} \quad \frac{R-x}{d-R} = -\frac{q'}{q}$$

Nous obtenons alors les expressions de la charge image q' et de sa position x :

$$q' = -\frac{R}{\mathrm{d}}q$$

$$x = \frac{R^2}{d}$$

Nous pouvons constater sur ce résultat que la charge induite sur la sphère, par définition q', n'est pas égale à q contrairement au cas précédent. Ceci est dû au fait que la sphère conductrice et la charge q ne sont pas en influence totale.

Par ailleurs, si la sphère conductrice était maintenue au potentiel V plutôt qu'au potentiel nul, il suffirait d'ajouter une charge $q'' = 4\pi\varepsilon_0 RV$ au centre de la sphère pour rendre compte de cette nouvelle situation. Enfin, si nous considérons le cas où la charge est très proche de la sphère, $d = R + a$ avec $a \ll R$, nous pouvons remarquer qu'au premier ordre, nous obtenons :

$$q' = -q$$

$$x = R - a$$

valeurs qui sont précisément celles obtenues dans le cas du plan infini, autrement dit, si la distance entre la charge et la surface de la sphère conductrice est petite, cette sphère peut être considérée comme un plan infini.

Exercices

1 Une sphère conductrice de rayon R_1 portant une charge de densité superficielle σ est placée au centre d'une sphère creuse de rayon interne R_2 (de surface S_2) et de rayon externe R_3 (de surface S_3).

a. Montrer qu'il apparaît une charge Q_2 sur S_2 et Q_3 sur S_3.

b. Exprimer Q_2, Q_3 et les densités superficielles correspondantes en fonction de σ.

c. Que devient Q_3 si S_3 est reliée à la terre ?

2 Soient un pendule électrostatique constitué d'une petite sphère métallique s de rayon r suspendue à un fil conducteur relié au sol et une sphère métallique S de rayon R portée au potentiel V, puis isolée. On approche S de s de telle sorte que leurs centres soient distants de d ($d > r + R$) et au même niveau :

a. Montrer que la sphère s s'écarte de sa position d'équilibre. Se rapproche-t-elle ou s'éloigne-t-elle de S ?

b. Calculer la charge Q de S, si $V = 6000$ V et $R = 5$ cm.

c. Calculer la charge q' du pendule s si $d = 25$ cm et $r = 1$ cm.

d. Donner l'expression du potentiel V_S, de la sphère S en fonction de V, r, R et d, puis calculer sa valeur numérique.

e. Calculer l'angle θ dont s'écarte le centre du pendule si $m = 0,1$ g.

3 On introduit dans un champ électrique uniforme $\vec{E}_0 = E_0\vec{u}_z$ une sphère métallique de centre O et de rayon R maintenue au potentiel nul. On cherche le potentiel $V(M)$ au point M situé à la distance r du centre O de la sphère, sur la droite OM faisant un angle θ avec l'axe Oz.

a. Montrer en utilisant l'équation de Laplace et en cherchant des solutions de la forme $V = f(r)\cos\theta + V_1$, que $f(r)$ doit se mettre sous la forme :

$$f(r) = Ar + \frac{B}{r^2}$$

b. Déterminer A, B, et V_1 à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

c. Montrer que le champ à l'extérieur peut être considéré comme la somme du champ $\vec{E}_0$ et d'un champ dipolaire dont on précisera le moment $\vec{p}$.

4 Déterminer la capacité d'un condensateur cylindrique.

5 Quelle est la distance minimum à maintenir entre les plaques d'un condensateur plan pour qu'il puisse supporter une tension de 500 V (le champ électrique maximum que l'on peut maintenir dans l'air dans les conditions normales de température et de pression est de $3 \cdot 10^6$ V/m).

6 À quelle force est soumise une charge ponctuelle $+q$ placée à la distance d d'un plan conducteur infini relié au sol ?

7 À quelle force est soumise une charge ponctuelle $+q$ placée au point $M(x, y)$ dans l'angle droit de deux demi-plans conducteurs infinis si on suppose qu'ils sont reliés au sol ?

8 Une sphère conductrice de rayon R_1, portant une charge Q est entourée par une sphère conductrice concentrique creuse de rayon intérieur $R_2 = 4R_1$ et de rayon extérieur $R_3 = 5R_1$, reliée à la masse.
a. Calculer la capacité du condensateur constitué par les deux conducteurs sphériques.
On introduit entre les deux conducteurs sphériques, une coquille sphérique concentrique conductrice, de rayon intérieur $R = 2R_1$ et de rayon extérieur $R' = 3R_1$.
b. Calculer la capacité du condensateur constitue par les trois conducteurs sphériques.
c. Retrouver ce résultat en calculant la capacité équivalente de cette association de condensateurs.

Chapitre 7

Électrostatique dans les milieux isolants

Dans ce chapitre, nous commencerons par décrire les caractéristiques électrostatiques d'un atome isolé, puis celles d'une molécule, en absence ou en présence d'un champ électrique appliqué. Nous introduirons ainsi la notion de dipôle permanent et de dipôle induit. Nous pourrons alors étudier les propriétés électrostatiques des systèmes contenant un ensemble de tels dipôles et définir un nouveau champ de vecteurs, le champ de déplacement $\vec{D}$.

7.1 Polarisation de la matière

1 Caractéristiques électriques d'un atome

2 Caractéristiques électriques d'un système dense d'atomes ou de molécules

7.2 Champ électrique, potentiel et charges de polarisation dans les isolants

1 Champ électrique et potentiel dans les isolants

2 Charges de polarisation

7.3 Systèmes présentant une polarisation permanente

1 Cas de la plaque infinie

2 Cas d'une sphère

7.4 Systèmes présentant une polarisation induite : les diélectriques

1 Cas de la plaque diélectrique

2 Cas de la sphère diélectrique

7.5 Le vecteur déplacement $\vec{D}$

1 Définition du vecteur déplacement

2 Propriétés du vecteur déplacement

7.6 Capacité et diélectrique

Compléments : notion de champ local

Mots-clés

- **Isolants** • **Diélectrique** • **Moment dipolaire** • **Moment dipolaire induit**
- **Polarisation** • **Susceptibilité** • **Vecteur déplacement**

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les propriétés électrostatiques d'un matériau dense en nous limitant au cas particulier des conducteurs. Nous avons montré que les propriétés électrostatiques de ces matériaux sont totalement déterminées par la présence d'un grand nombre d'électrons libres de se mouvoir dans le conducteur. Dans le présent chapitre, nous allons étudier les propriétés électrostatiques des isolants, matériaux dans lesquels il n'y a pas d'électrons libres, les électrons restant liés à leur noyau atomique.

Les propriétés électrostatiques des isolants sont très différentes de celles des conducteurs. Prenons l'exemple du comportement de ces deux types de matériaux lorsqu'ils sont soumis à un champ électrique extérieur. Dans un conducteur, les charges libres se déplacent de manière à maintenir un champ électrique nul à l'intérieur du conducteur ; à l'inverse, dans un isolant, ce type de déplacement collectif des électrons est impossible et par conséquent le champ électrique à l'intérieur d'un isolant soumis à un champ externe n'est pas nul.

Dans notre étude des conducteurs, nous avons toujours ignoré le rôle des charges électriques liées aux structures atomiques et moléculaires des supports solides pour ne nous intéresser qu'aux charges libres qui contrôlent les propriétés électrostatiques du milieu. Dans les isolants en revanche, il sera indispensable de tenir compte de ces charges. En particulier il conviendra de considérer leurs positions et déplacements relatifs, et d'évaluer l'influence des effets dits de « polarisation » qui apparaissent au niveau de chaque atome ou molécule dès que le barycentre de leurs charges positives ne coïncide plus avec celui de leurs charges négatives. Notons que dans les conducteurs, ces phénomènes sont soit négligeables par les effets spécifiques dus aux électrons libres, soit inexistants (lorsqu'un conducteur est soumis à un champ électrique, nous avons vu au chapitre précédent que les charges libres s'organisent pour que le champ électrique intérieur soit nul, par conséquent il ne pourra pas y avoir de polarisation induite par le champ extérieur dans un métal). Ces phénomènes peuvent donc être considérés comme la spécificité des isolants. On parle alors d'électrostatique des isolants.

Nous pouvons classer les isolants en deux catégories selon qu'ils possèdent une polarisation permanente ou une polarisation induite qui ne peut apparaître qu'en présence d'un champ électrique extérieur. Ces derniers sont appelés matériaux diélectriques et plus simplement diélectriques. Les propriétés électrostatiques de ces deux types d'isolants bien que voisines sont différentes, et nous les étudierons donc successivement. Toutefois, nous pourrons mettre en évidence un certain nombre de concepts communs aux deux descriptions parmi lesquels les notions de charges de polarisation, de champs électriques local et moyen. Nous utiliserons ces notions pour calculer ensuite le champ électrique et le potentiel, à l'extérieur comme à l'intérieur de tels systèmes, en absence ou en présence de champ externe.

7.1. Polarisation de la matière

1 Caractéristiques électriques d'un atome

Considérons un atome, de numéro atomique Z, non ionisé. Il est constitué par un noyau chargé positivement Ze, autour duquel, dans l'image simple, voire simpliste, de l'atome donnée par N. Bohr, gravite un nuage électronique sphérique chargé négativement $-Ze$.

L'atome est globalement neutre. De plus, le barycentre des charges négatives est confondu avec celui du noyau. Cet atome neutre ne présente pas donc pas de dipôle permanent.

Soumettons maintenant cet atome à un champ électrique $\vec{E}_0$. Il y a alors déplacement des charges sous l'action du champ électrique. Le noyau, de charge positive, se déplace dans le sens du champ appliqué tandis que le nuage électronique, de charge négative, se déplace en sens inverse. À l'équilibre, le centre de gravité des charges négatives n'est plus confondu avec celui des charges positives. L'atome, tout en restant neutre, présente maintenant un moment dipolaire, induit par la présence d'un champ électrique extérieur. Estimons ce moment qui sera appelé « moment dipolaire induit ».

Dans le repère dans lequel les électrons sont fixes, l'équilibre est atteint lorsque la force exercée sur le noyau est nulle. Cette force est la force électrostatique résultante due au champ extérieur appliqué $\vec{E}_0$ augmenté du champ créé par les électrons $\vec{E}_e$, comme le montre la figure 7.1.

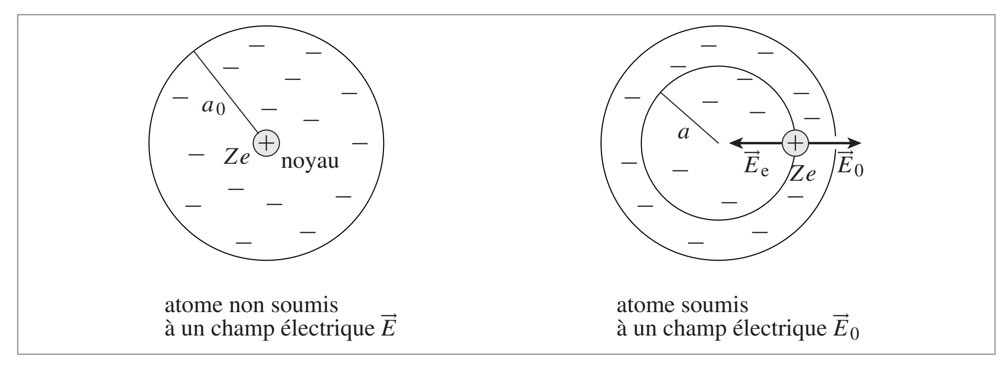


Fig. 7.1. Modèle de l'atome non soumis et soumis à un champ électrique.

Pour calculer cette dernière contribution, nous supposerons que le nuage électronique reste une sphère de rayon atomique a_0 (ce qui est vrai dans le cas d'un champ appliqué pas trop intense) caractérisée par une densité volumique de charges uniforme égale à $-3Ze/4\pi a_0^3$, son centre étant choisi comme origine des espaces. Appliquons alors le théorème de Gauss pour déterminer le champ électrique $\vec{E}_e$ auquel est soumis le noyau qui se trouve à la distance a du barycentre des charges électroniques. La symétrie du système impose au champ $\vec{E}_e$ d'être radial, nous prendrons donc comme surface de Gauss une sphère de rayon a. On en déduit immédiatement le module du champ électrique $\vec{E}_e$:

$$E_e = \frac{Zea}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3}$$

La condition d'équilibre $\vec{E}(A) = \vec{E}_0(A) + \vec{E}_e(A) = \vec{0}$ s'écrit donc :

$$E_0 - \frac{Zea}{4\pi\varepsilon_0 a_0^3} = 0$$

ce qui permet de déterminer la position d'équilibre du noyau a :

$$a = \frac{4\pi\varepsilon_0 E_0 a_0^3}{Ze}$$

Ce décalage entre le barycentre des charges positives (le noyau) et celui des charges négatives (les électrons) caractérise le comportement électrostatique d'un atome neutre soumis à un champ électrique extérieur. Dans ces circonstances, nous pourrons donc le décrire comme un dipôle électrostatique, de moment $\vec{p}$ orienté dans le sens du champ $\vec{E}_0$ et de module proportionnel à E_0 :

$$\vec{p} = Ze\vec{a} = 4\pi\varepsilon_0 a_0^3 \vec{E}_0 = \alpha \vec{E}_0$$

Le coefficient α est appelé « coefficient de polarisabilité électronique » de l'atome. En prenant un rayon de Bohr moyen a_0 d'environ $5\ 10^{-11}$ m, nous obtenons une polarisabilité électronique de l'ordre de 10^{-40} C · m^2/V. Les valeurs des polarisabilités de différents atomes sont données dans le tableau :

	H	He	Li	Be	C	Ne	Na	Ar	K
Z	1	2	3	4	6	10	11	18	19
$10^{40}\alpha$ (C · m^2/V)	0,73	0,23	13	10	1,7	0,45	30	1,8	38

Nous pouvons constater dans ce tableau que l'hydrogène et les métaux alcalins (lithium, sodium, potassium), qui ne possèdent qu'un seul électron sur leur couche externe, présentent une polarisabilité importante qui augmente avec le numéro atomique. Cette propriété est due à la grande facilité de polarisation que présente cet électron isolé. À l'inverse, les gaz rares (hélium, néon, argon) présentent une polarisabilité beaucoup plus faible, les électrons « saturant » les couches électroniques étant moins facilement polarisables que ceux appartenant à des couches non saturées.

Notons enfin que ces effets, qui seront déterminants pour décrire les propriétés électrostatiques des diélectriques, sont dus à de très petits déplacements relatifs. En effet, même si nous placions un atome d'hydrogène dans un champ électrique très intense de 10^6 V/m, nous obtiendrions une valeur de a voisine de 10^{-15} m, soit 10^{-5} fois le rayon de Bohr a_0 de l'atome.

Caractéristiques électriques d'une molécule

Nous venons de voir comment nous pouvions décrire un atome du point de vue électrostatique : atome neutre sans moment dipolaire permanent en absence de champ extérieur appliqué, dipôle induit en présence d'un champ appliqué. Qu'en est-il dans le cas d'une molécule ?

Comme l'atome, une molécule non ionisée est neutre. Que pouvons-nous dire de son moment dipolaire ? En fait, cela dépend des positions relatives des différents atomes constituant la molécule. Si la molécule est symétrique, comme O_2 (oxygène), N_2 (azote), CO_2 (dioxyde de carbone), C_6H_6 (benzène),... le barycentre des charges positives (ensemble des noyaux) sera confondu avec celui des charges négatives (ensemble des électrons), la molécule ne présente alors pas de moment dipolaire permanent. En revanche, si la molécule est dissymétrique, comme H_2O, HCl,... les barycentres des charges positives et négatives seront distincts. La molécule présentera dans ce cas un moment dipolaire permanent $\vec{p}_0$. Ainsi, dans l'eau, les électrons des atomes d'hydrogène se sont en partie transportés vers l'oxygène, si bien que les centres de gravité des charges positives et négatives ne coïncident pas. Les deux liaisons O–H faisant un angle de 105°, le moment dipolaire est normal à la droite joignant les deux hydrogènes (fig. 7.2).

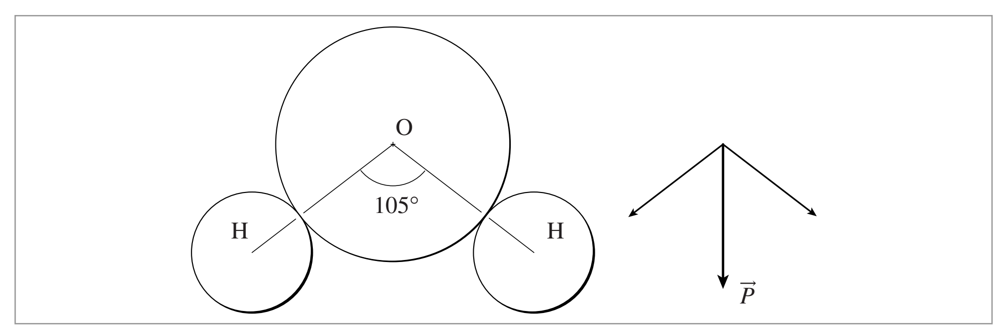


Fig. 7.2. Moment dipolaire associé à une molécule d'eau.

Le tableau suivant donne les moments dipolaires de quelques molécules en MKSA

H_2O	HCl	CO	HBr	HI
$6,2 \cdot 10^{-30}$	$3,43 \cdot 10^{-30}$	$0,4 \cdot 10^{-30}$	$2,6 \cdot 10^{-30}$	$1,26 \cdot 10^{-30}$
H_2S	SO_2	NH_3	$C_2H_5OH_6$	
$5,3 \cdot 10^{-30}$	$5,3 \cdot 10^{-30}$	$5 \cdot 10^{-30}$	$3,66 \cdot 10^{-30}$	

L'existence de ces moments permanents n'est pas sans conséquences sur le comportement physique de ces molécules. Par exemple, en phase vapeur, les molécules ne présentant pas de moments permanents seront sans interaction mutuelle et pourront donc être considérées en première approximation comme un gaz parfait (il reste malgré tout les interactions dipôle induit-dipôle induit de plus faible intensité) ; en revanche les interactions dipôles – dipôles entre molécules polaires seront responsables du fait que les propriétés de ces gaz s'éloigneront parfois considérablement de celles des gaz parfaits.

Certaines molécules présentent donc un moment dipolaire permanent. Mais les molécules, quelles qu'elles soient, possèdent également un moment dipolaire induit. En effet, que se passe-t-il lorsqu'on place une molécule dans un champ électrique extérieur ? Comme dans le cas d'un atome, les nuages électroniques et les noyaux se déplacent dans des directions opposées donnant ainsi naissance à des moments dipolaires induits supplémentaires. Le moment dipolaire total associé à la molécule a pour expression dans sa forme la plus générale :

$$\vec{p} = \vec{p}_0 + \overline{\overline{\alpha}}\vec{E}$$

Il faut noter que dans cette expression $\overline{\overline{\alpha}}$ est un tenseur, appelé « tenseur de polarisabilité électronique » de la molécule. En effet, à la différence d'un atome qui présente une symétrie sphérique, la symétrie d'une molécule est plus complexe et n'autorise pas à considérer systématiquement une polarisation induite comme étant parallèle au champ électrique appliqué. Toutefois, dans la suite de notre exposé, nous ne considérerons pour simplifier que les cas pour lesquels le tenseur $\overline{\overline{\alpha}}$ se réduit à un scalaire.

2 Caractéristiques électriques d'un système dense d'atomes ou de molécules

Considérons maintenant un système dense constitué d'une grande quantité d'atomes ou de molécules.

Aucun de ces atomes ou molécules n'étant ionisé, l'ensemble est globalement neutre. En revanche chacun de ces atomes ou molécules peut présenter un moment dipolaire induit et éventuellement un moment dipolaire permanent. Dans la suite de notre étude des propriétés électrostatiques des isolants, nous verrons qu'il convient de considérer le matériau non pas à l'échelle atomique ou moléculaire (dite microscopique) mais au contraire à une échelle plus grande (dite macroscopique). Dans ce cas, le caractère discret des atomes et molécules constituant l'isolant disparaît au profit d'une description continue du milieu.

C'est ainsi que la notion de dipôle individuel s'efface devant celle de densité de polarisation $\vec{P}$. La densité de polarisation est définie par la relation :

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

N étant le nombre d'atomes ou de molécules par unité de volume. Notons que la densité de polarisation est homogène à une charge par unité de surface et non à un dipôle.

Chaque élément de volume $\mathrm{d}\tau$ pourra être considéré comme ayant un moment dipolaire $\vec{P}\,\mathrm{d}\tau = N\vec{p}\,\mathrm{d}\tau$. Ainsi, tout comme les atomes ou les molécules, chaque élément de volume pourra être crédité éventuellement d'un moment permanent et/ou d'un moment électronique induit. Nous parlerons de polarisation permanente et de polarisation électronique induite (le terme « densité » ayant disparu à l'usage). Mais au delà de ces deux possibilités, très similaires à celles que nous avons décrites pour les atomes et les molécules, nous allons voir maintenant que nous pouvons introduire pour les matériaux denses un nouveau processus de polarisation : la polarisation induite d'orientation. Cette notion n'est plus issue directement des caractéristiques individuelles des atomes ou molécules comme peut l'être la polarisation électronique induite, elle est au contraire liée à la description du système dans son ensemble. De quoi s'agit-il ?

Considérons un système constitue de molécules polaires. En absence de champ électrique extérieur appliqué, les différentes molécules, indépendantes les unes des autres, s'orientent de façon aléatoire, dans toutes les directions. En moyenne, la polarisation $\vec{P}$ est nulle.

Plaçons maintenant un tel système dans un champ électrique extérieur $\vec{E}_0(\parallel\ \vec{u}_z)$. Les dipôles moléculaires vont avoir tendance à s'aligner suivant le champ électrique. À température nulle, tous les moments dipolaires seront parallèles au champ extérieur ; à température non nulle, l'agitation thermique et les collisions entre molécules s'opposeront à cet alignement. Quelle est la polarisation $\vec{P}$ d'un tel système ?

L'énergie d'un dipôle $\vec{p}$ dans le champ électrique $\vec{E}_0$ est par définition égale à $-\vec{p}\cdot\vec{E}_0 = -pE_0\cos\theta$, θ étant l'angle entre $\vec{p}$ et $\vec{E}_0$ (voir chapitre 8). À l'équilibre thermique, on peut montrer que des molécules obéissent à la statistique de Maxwell-Boltzmann, le nombre moyen $n(\theta)$ de molécules faisant un angle θ avec le champ $\vec{E}_0$ est alors égal à :

$$n(\theta) = n_0\,\mathrm{e}^{\frac{pE_0\cos\theta}{\mathrm{k}T}}$$

où n_0 est un coefficient de normalisation que nous déterminerons plus tard (voir chapitre 4, paragraphe 2.3). Pour des champs électriques et des températures ordinaires, l'énergie dipolaire $-\vec{p}\cdot\vec{E}_0$ est petite devant l'énergie thermique $\mathrm{k}T$, l'exponentielle peut être

développée au premier ordre. Nous obtenons ainsi :

$$n(\theta) = n_0 \left(1 + \frac{pE_0 \cos\theta}{kT}\right)$$

Si on intègre cette expression sur toutes les valeurs de θ, on doit obtenir le nombre d'atomes par unité de volume N. Nous déterminons ainsi $n_0 = \frac{N}{4\pi}$.

Pour obtenir la polarisation $\vec{P}$ (qui rappelons-le, correspond à la moyenne des moments dipolaires par unité de volume) il suffit de sommer toutes les contributions pondérées par leur probabilité d'apparition. Puisque la polarisation résultante sera dans la direction du champ électrique $\vec{E}_0$, il nous suffit de calculer cette composante. Nous obtenons alors :

$$\vec{P} = P\vec{u}_z = \left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} n(\theta) p \cos\theta 2\pi \sin\theta \, d\theta\right) \vec{u}_z$$

Nous obtenons finalement :

$$\vec{P} = \frac{Np^2}{3kT}\vec{E}_0$$

Ainsi un système constitué de dipôles permanents présente, à température non nulle, un comportement moyen qui se caractérise par une polarisation $\vec{P}$ proportionnelle au champ électrique appliqué $\vec{E}_0$. Formellement cette polarisation est une polarisation induite, toutefois son origine est tout à fait différente de celle de la polarisation électronique induite. Ici, la proportionnalité au champ apparaît comme étant due à un phénomène collectif d'orientation dans le champ, nous parlerons de « polarisation orientationnelle induite ».

7.2. Champ électrique, potentiel et charges de polarisation dans les isolants

1 Champ électrique et potentiel dans les isolants

Dans ce paragraphe, nous allons préciser la notion de champ électrique que nous rencontrerons dans la description des propriétés électrostatiques des isolants. Considérons donc le cas général d'un isolant, soumis à un champ électrique extérieur $\vec{E}_0$.

Hors de cet isolant, il n'y a aucune ambiguïté. Le champ électrostatique total est, d'après le principe de superposition, égal au champ appliqué $\vec{E}_0$ augmenté de celui créé par la distribution de dipôles. Pour calculer ce dernier, il suffit de remarquer que tout point à l'extérieur du matériau est loin de n'importe quel dipôle contenu dans l'isolant et donc que le caractère discret de la distribution de dipôles n'est pas pertinent, aussi les champs et potentiels à l'extérieur du matériau sont ceux créés par une distribution continue de dipôles caractérisée par la polarisation $\vec{P}$.

En revanche, à l'intérieur du matériau, il convient de préciser un peu plus ce que nous entendons par champ électrostatique. En effet, de quoi parlons-nous ?

En toute rigueur, le champ électrique réel est, comme à l'extérieur, égal à E_0 augmenté de celui créé par la distribution de dipôles. Toutefois, pour évaluer la contribution dipolaire en un point donné, il faudra maintenant tenir compte du caractère discret de la distribution des dipôles, au moins en ce qui concerne les dipôles appartenant à un voisinage

immédiat du point considéré, les autres pouvant continuer à être décrits par une polarisation $\vec{P}$. Dans cette description, nous devons considérer le champ électrique réel, celui qui apparaît à l'échelle microscopique du système. Ce champ que nous appellerons dorénavant « champ électrique local » est celui qui agit réellement sur chaque atome ou molécule et crée le moment dipolaire induit. Ce champ électrique local varie très rapidement, sur des distances de l'ordre de la distance interatomique ou intermoléculaire, et fluctue constamment en fonction du temps en raison de l'agitation thermique. Nous pourrions nous poser la question suivante : est-il vraiment nécessaire de connaître ce champ local en tout point de l'isolant pour pouvoir décrire les propriétés électrostatiques des isolants à l'échelle macroscopique ? La réponse est non. La première raison, la plus immédiate, est une raison d'ordre historique. L'électrostatique des isolants a été décrite pour l'essentiel au XIX[e] siècle à une époque où la description microscopique de la matière n'était pas clairement connue. Nous pouvons en avancer une seconde, plus physique. Si nous nous intéressons à des phénomènes qui s'établissent sur les dimensions macroscopiques du système, il nous suffit en fait de connaître la valeur moyenne dans le temps et dans l'espace de ce champ local. C'est cette valeur moyenne du champ local que nous appellerons dorénavant champ électrique dans l'isolant et noterons $\vec{E}$ (certains le nomment « champ électrique macroscopique » pour bien le différencier du champ local dit « microscopique »). Ce champ électrique, par construction, ne varie éventuellement que sur de grandes distances, et néglige le caractère discret de la distribution de dipôles. De ce point de vue, cette notion de champ électrique $\vec{E}$, moyenne du champ local, est à rapprocher de la notion précédente de polarisation $\vec{P}$.

2 Charges de polarisation

Pour calculer ce champ électrique intérieur, nous n'allons pas bien entendu calculer le champ local puis effectuer sa moyenne qui, pour qu'elle ait un sens, devrait être faite sur des temps grands devant le temps caractéristique des fluctuations temporelles de chaque dipôle (de l'ordre de 10^{-16} s pour la polarisation électronique induite et voisine de 10^{-11} s pour ce qui est de la polarisation d'orientation) et sur des dimensions grandes devant la distance interatomique ou intermoléculaire. Nous allons plutôt essayer d'établir des équations constitutives auxquelles devrait obéir ce champ électrique. Quelles sont les équations dont nous disposons ?

Le champ électrique réel, $\vec{E}_{\text{loc}}$, doit vérifier les deux équations fondamentales de l'électrostatique. En particulier nous avons :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_{\text{loc}} = \vec{0}$$

Nous avons vu au chapitre 3 que cette équation signifiait que le champ électrique local dérive d'un potentiel. Ainsi, la circulation du champ local suivant un chemin intérieur dont les extrémités sont deux points situés juste à l'extérieur de l'isolant devra être indépendante du trajet suivi. La moyenne de ce champ local, donc le champ électrique $\vec{E}$, devra obéir aux mêmes spécifications. En d'autres termes, cela veut dire que $\vec{E}$ doit également vérifier :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{0}$$

Ainsi pourrons-nous associer à ce champ électrique $\vec{E}$ un potentiel V, qu'on doit considérer comme le potentiel exact à l'extérieur de l'isolant et comme un potentiel moyenne des potentiels locaux à l'intérieur.

Par ailleurs, la moyenne de l'équation liée à la divergence de $\vec{E}_{\text{loc}}$, nous conduit à la seconde équation fondamentale devant être vérifiée par le champ $\vec{E}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Dans cette expression, ρ représente la densité moyenne locale de charges dans l'isolant, étant bien entendu que la charge totale dans l'isolant est nulle puisqu'il est globalement neutre.

À quoi correspond cette densité volumique de charges ? Considérons un milieu caractérisé à l'échelle macroscopique par une polarisation $\vec{P}$. Nous pouvons calculer le potentiel $V(\mathrm{M})$ crée par ce milieu en un point M. La contribution d'un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ centré au point M′ est égale au potentiel créé par un dipôle $\vec{P}(r)\,\mathrm{d}\tau$ (fig. 7.3) :

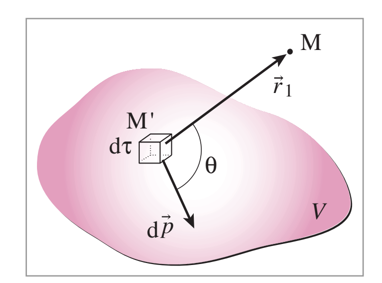


Fig. 7.3.

$$\mathrm{d}V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P\,\mathrm{d}\tau\cos\theta}{|\vec{r}_{\mathrm{M}} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{u}_{\mathrm{M}'\mathrm{M}}\,\mathrm{d}\tau}{|\vec{r}_{\mathrm{M}} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|^2}$$

Nous allons introduire un gradient en remarquant que :

$$\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}_{\mathrm{M}} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,\vec{r}_{\mathrm{M}'}}\left(\frac{1}{|\vec{r}_{\mathrm{M}} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|}\right) = \frac{\vec{u}_{\mathrm{M}'\mathrm{M}}}{|\vec{r}_{\mathrm{M}} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|^2}$$

En introduisant cette notation, la contribution au potentiel peut se réécrire :

$$\mathrm{d}V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\vec{P}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}_{\mathrm{M}} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|}\right)\mathrm{d}\tau$$

En vertu du principe de superposition, le potentiel en M s'obtient en sommant toutes ces contributions. Nous obtenons ainsi :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint_{\mathrm{V}}\vec{P}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}_{\mathrm{M}} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|}\right)\mathrm{d}\tau$$

En utilisant la relation vectorielle :

$$\vec{P}\cdot\vec{\nabla}'\left(\frac{1}{|\vec{r}_{\mathrm{M}} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|}\right) = \vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r}_{\mathrm{M}} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|}\right) - \left(\frac{1}{|\vec{r}_{\mathrm{M}} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|}\right)\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}$$

on peut finalement écrire :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\vec{\nabla}'\cdot\left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r}_{\mathrm{M}} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|}\right)\mathrm{d}\tau - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\iiint\left(\frac{1}{|\vec{r}_{\mathrm{M}} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|}\right)\vec{\nabla}'\cdot\vec{P}\,\mathrm{d}\tau$$

expression que nous pouvons réécrire :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iint \left(\frac{\vec{P}}{|\vec{r}_\mathrm{M} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|} \right) \cdot \mathrm{d}\,\vec{S}' - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \iiint \left(\frac{1}{|\vec{r}_\mathrm{M} - \vec{r}_{\mathrm{M}'}|} \right) \vec{\nabla}' \cdot \vec{P}\,\mathrm{d}\tau$$

Formellement, ceci est équivalent au potentiel que créeraient en M des charges, dites de « polarisation », distribuées en surface et en volume, de densités :

$$\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n} \qquad \text{et} \qquad \rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$$

$\vec{n}$ étant le vecteur unitaire normal à la surface, orienté vers l'extérieur.

Soulignons encore une fois ici qu'il ne s'agit pas de charges supplémentaires, différentes de celles portées par les atomes ou les molécules constituant l'isolant, ces charges ne sont que le fruit d'une description cohérente du système en termes de grandeurs moyennes.

Ainsi, du point de vue des propriétés électrostatiques macroscopiques, un isolant pourra être considéré, comme un système présentant une densité surfacique de charges $\vec{P} \cdot \vec{n}$ et une densité volumique de charges $\rho = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$. Dans le cas d'une polarisation uniforme, le potentiel devra satisfaire à l'équation de Laplace, tandis que dans le cas d'une polarisation non uniforme, il devra satisfaire à l'équation de Poisson.

Nous allons maintenant illustrer ce résultat et appréhender ces notions formelles de charges de polarisation, de champ et de potentiel électriques créés par un isolant dans des systèmes ayant successivement une polarisation uniforme permanente et induite. Le cas d'une distribution non uniforme ne sera pas traité.

7.3. Systèmes présentant une polarisation permanente

Étudions les champs et potentiels électrostatiques créés par un système constitué par un ensemble dense de molécules polaires toutes orientées dans la même direction. Un matériau présentant cette caractéristique est appelé « ferroélectrique » (ils sont par exemple utilisés sous forme d'électrets dans les microphones). Le champ électrique extérieur appliqué étant supposé nul. Nous considérons successivement deux géométrie particulières : une plaque et une sphère.

1 Cas de la plaque infinie

Soit une plaque infinie, d'épaisseur h, l'orientation privilégiée des moments dipolaires $\vec{p}$ étant perpendiculaire aux surfaces de la plaque (fig. 7.5). La densité uniforme de dipôles est notée N. La polarisation uniforme $\vec{P}$ du système est égale à $N\vec{p}$. Notons que dans ce cas, la polarisation, connue préalablement à tout calcul, est une caractéristique intrinsèque du système.

Conformément à nos conclusions du paragraphe précédent, à l'échelle macroscopique, un tel système est équivalent à un système de deux couches uniformément chargées, l'une passant par A chargée négativement, de densité surfacique $-\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n}_\mathrm{A}$, l'autre passant par B chargée positivement $\sigma = \vec{P} \cdot \vec{n}_\mathrm{B}$.

Le champ électrique $\vec{E}$ créé en tout point de l'espace par un tel système est facilement calculable (voir chapitre 3). Le plan chargé σ crée une contribution de module $P/2\varepsilon_0$, les lignes de champ étant perpendiculaires au plan et le fuyant. Le plan chargé $-\sigma$ crée une contribution de même module, mais les lignes de champ sont orientées maintenant vers le plan. Le champ total est la superposition de ces deux contributions : à l'extérieur des plans, il est nul ; entre les plans, il est perpendiculaire aux plans, orienté dans la direction BA et de module P/ε_0.

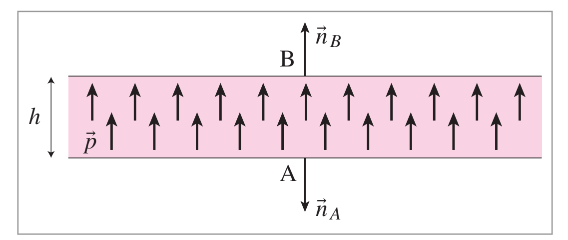


Fig. 7.4. Polarisation uniforme dans une plaque diélectrique.

Nous pourrions évaluer le potentiel en tout point de l'espace en exploitant la relation qui le lie au champ électrique. Ce calcul est simple. Nous allons toutefois le reprendre en utilisant cette fois les définitions que nous avons données au chapitre 2 pour mieux comprendre la nature de ces charges de polarisation.

À l'extérieur de la plaque

Commençons par calculer le potentiel V à l'extérieur de cette plaque, en un point M de coordonnée $z > 0$, l'origine des espaces étant prise au centre de la plaque, sur l'axe perpendiculaire à la plaque passant par M (fig. 7.5).

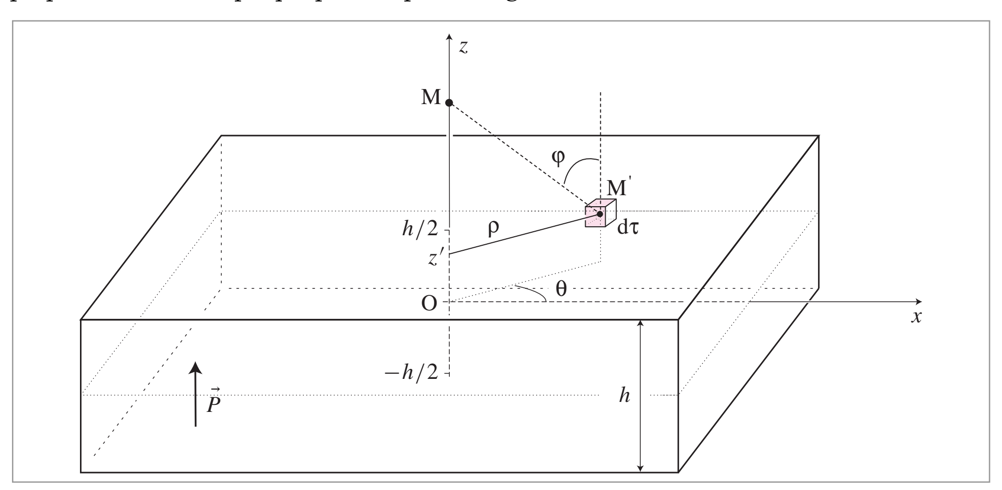


Fig. 7.5. Calcul du potentiel à l'extérieur d'une plaque infine d'épaisseur *h* présentant une polarisation uniforme.

Un élément de volume $\mathrm{d}\tau$ de la plaque centré autour d'un point M′ de coordonnées cylindriques (ρ, θ, z') correspond à un dipôle $P\,\mathrm{d}\tau = P\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z'$. La contribution de cet élément infinitésimal de volume au potentiel en M, notée $\mathrm{d}V(\mathrm{M})$, a pour expression :

$$\mathrm{d}V(\mathrm{M}) = \frac{P}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{\cos\varphi\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z'}{\rho^2 + (z - z')^2}$$

φ est l'angle que fait la polarisation $\vec{P}$ avec la direction $\overrightarrow{\mathrm{M'M}}$.

Comme il y a invariance par rotation autour de l'axe z, cette contribution est indépendante de l'angle θ. Après intégration de θ entre 0 et 2π, la contribution $\mathrm{d}V_a(\mathrm{M})$ d'un anneau de rayon ρ, situé à l'altitude z', de section $\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z'$ est égale à :

$$\mathrm{d}V_a(\mathrm{M}) = \frac{P}{2\varepsilon_0}\frac{(z-z')\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z'}{\left(\rho^2+(z-z')^2\right)^{3/2}}$$

En intégrant sur toute l'épaisseur de la couche, nous obtenons une contribution de l'élément tubulaire $\mathrm{d}V_t(\mathrm{M})$:

$$\mathrm{d}V_t(\mathrm{M}) = \frac{P\rho\,\mathrm{d}\rho}{2\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\left(\rho^2+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left(\rho^2+\left(z+\frac{h}{2}\right)^2\right)^{1/2}}\right)$$

Il convient enfin d'intégrer sur toutes les valeurs possibles de ρ (pour l'intégration sur ρ, il conviendra de considérer la plaque infinie comme un disque dont nous ferons tendre ensuite le rayon ρ_0 vers l'infini) :

$$\begin{aligned}V_{\rho_0} &= \int_0^{\rho_0}\mathrm{d}V_t(\mathrm{M})\\ &= \frac{P}{2\varepsilon_0}\left[\left[\rho_0^2+\left(z-\frac{h}{2}\right)^2\right]^{1/2} - \left[\rho_0^2+\left(z+\frac{h}{2}\right)^2\right]^{1/2} - \left(z-\frac{h}{2}\right)+\left(z+\frac{h}{2}\right)\right]\end{aligned}$$

lorsque ρ_0 tend vers l'infini, les deux premiers termes entre crochets se compensent, nous obtenons alors :

$$\text{si } z > \frac{h}{2}, \qquad V(\mathrm{M}) = \frac{Ph}{2\varepsilon_0}$$

Ce potentiel est celui créé par les dipôles en tout point M de coordonnée $z > h/2$.
Pour les valeurs de $z < -h/2$, un raisonnement identique conduit à :

$$z < -\frac{h}{2}, \qquad V(\mathrm{M}) = -\frac{Ph}{2\varepsilon_0}$$

Le potentiel V créé à l'extérieur de la plaque est donc constant, le champ électrique à l'extérieur de la plaque est par conséquent nul.

À l'intérieur de la plaque

D'après le calcul précédent, les potentiels en A ($z = -h/2$) et B ($z = +h/2$) peuvent être calculés. En vertu de la continuité du potentiel, la différence de potentiel $V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B})$ est égale à :

$$V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) = -\frac{Ph}{2\varepsilon_0} - \left(\frac{Ph}{2\varepsilon_0}\right) = -\frac{Ph}{\varepsilon_0}$$

Nous pouvons maintenant calculer le champ électrique à l'intérieur de la plaque. Par définition, puisque la polarisation est uniforme, le champ doit être constant dans la plaque. La circulation de A à B de ce champ étant égale à $V(A) - V(B)$, nous obtenons :

$$V(\mathrm{A}) - V(\mathrm{B}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{E} \cdot \vec{u}_z \,\mathrm{d}z = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} E_z \,\mathrm{d}z = E_z h$$

ce qui conduit à l'expression du champ électrique dans la plaque :

$$E_z = -\frac{P}{\varepsilon_0} \qquad \vec{E} = -\frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

Nous retrouvons ainsi par un calcul n'utilisant que les définitions du chapitre 3, le résultat que nous avions obtenu en utilisant directement la notion de charges de polarisation.

2 Cas d'une sphère

Considérons maintenant une sphère de rayon R, constituée d'une répartition uniforme de dipôles permanents parallèles $\vec{p}$ de densité N (fig. 7.6).

Comme dans le cas précédent, nous allons calculer successivement le champ et le potentiel électriques créés à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère.

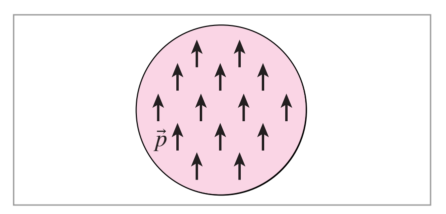


Fig. 7.6. Polarisation uniforme dans une sphère diélectrique.

À l'extérieur de la sphère

Pour calculer le champ à l'extérieur de la sphère, nous allons exploiter une particularité des distributions sphériques. Revenons un instant à l'échelle microscopique. Chaque dipôle moléculaire $\vec{p}$ peut être représenté par deux charges q et $-q$ distantes de a. Aussi la sphère de dipôles peut être vue comme la superposition de deux sphères de rayon R, l'une chargée positivement S_+, l'autre chargée négativement S_-, sphères dont les centres sont décalés de la distance a. Ainsi le champ électrique créé par la sphère de dipôles sera égal à la somme des champs créés par chacune des deux sphères. Puisque nous sommes à l'extérieur de la sphère, les contributions de S_+ et S_- seront égales aux champs créés respectivement par une charge ponctuelle Q_+ et Q_- placée en leur centre :

$$Q_+ = qN\frac{4\pi}{3}R^3$$

$$Q_- = -qN\frac{4\pi}{3}R^3$$

Ainsi la sphère de dipôles, vue de l'extérieur, est équivalente à un dipôle $\vec{\mathcal{P}}$ placé à l'origine et constitué par deux charges ponctuelles $+Q$ et $-Q$, distantes de a :

$$\vec{\mathcal{P}} = Q\vec{a} = qN\frac{4\pi}{3}R^3\,\vec{a} = \frac{4\pi}{3}R^3\,\vec{P}$$

Il est alors facile de calculer le champ électrique en tout point M de coordonnées sphériques (r, θ, ϕ) en appliquant les définitions que nous avons introduites au chapitre 5 :

$$\begin{aligned} E_r &= \frac{2\mathcal{P}\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{2P\cos\theta R^3}{3\varepsilon_0 r^3} \\ E_\theta &= \frac{\mathcal{P}\sin\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{P\sin\theta R^3}{3\varepsilon_0 r^3} \\ E_\phi &= 0 \end{aligned}$$

Nous pouvons de la même manière calculer le potentiel en tout point extérieur de la sphère. En particulier, le potentiel en un point M de coordonnées sphérique (r, θ, ϕ) est égal à :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{\mathcal{P}\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{P\cos\theta R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

Nous pouvons de plus remarquer que la sphère n'est pas une surface équipotentielle. En effet, sur la sphère au point (R, θ, ϕ), le potentiel dépend de l'angle θ selon la relation :

$$V(\mathrm{M}) = \frac{\mathcal{P}\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2} = \frac{P\cos\theta R}{3\varepsilon_0}$$

À l'intérieur de la sphère

La polarisation étant uniforme, il n'y a pas de charges de polarisation en volume. Le potentiel V à l'intérieur de la sphère doit donc vérifier l'équation de Laplace et satisfaire la condition aux limites imposant le potentiel sur la surface. Or le potentiel $V(z) = Pz/3\varepsilon_0$ remplit ces deux conditions ; la solution étant unique (voir chapitre 4), ce potentiel est le potentiel à l'intérieur de la sphère.

Nous pouvons dès lors calculer le champ électrique en utilisant $\vec{E} = -\vec{\nabla}V$. Nous obtenons :

$$\vec{E} = E_z\vec{u}_z = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

Densités surfaciques de charges

Les champs électriques étant maintenant connus à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère, nous pouvons évaluer la densité surfacique de charges qui, distribuées sur une sphère de rayon R, créeraient les mêmes champs. Il suffit d'appliquer le théorème de Gauss à une surface fermée enveloppant un élément infinitésimal de surface chargée, centré autour du point (R, θ, φ) (voir figure 7.7).

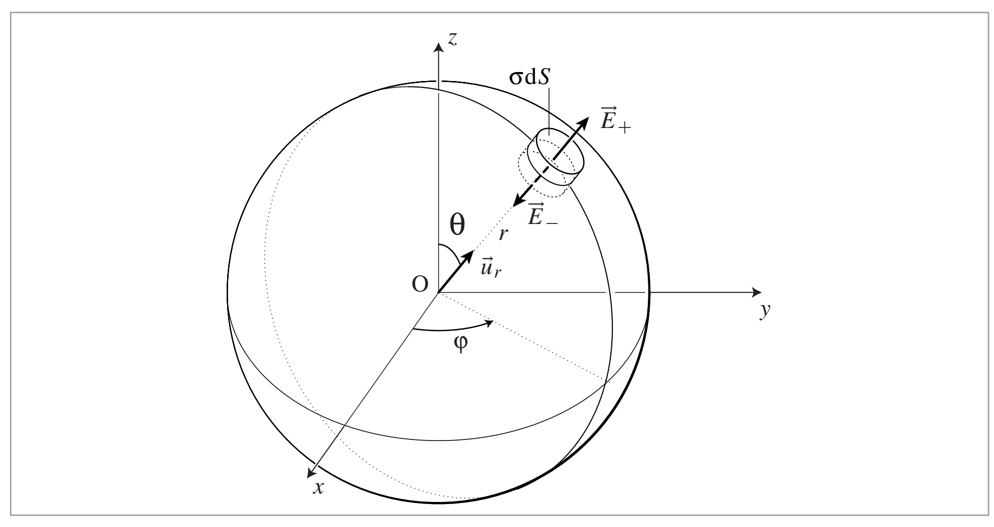


Fig. 7.7. Calcul de la densité surfacique de charges.

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}S = \vec{E}_+ \cdot \vec{u}_\mathrm{r}\,\mathrm{d}S + \vec{E}_- \cdot (-\vec{u}_\mathrm{r})\,\mathrm{d}S$$

En utilisant les expressions que nous venons de calculer pour le champ électrique à l'extérieur et à l'intérieur de la sphère, nous obtenons

$$\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}S = \frac{2P\cos\theta R^3}{3\varepsilon_0 R^3}\,\mathrm{d}S + \frac{P\cos\theta}{3\varepsilon_0}\,\mathrm{d}S = \frac{P\cos\theta}{\varepsilon_0}\,\mathrm{d}S$$

La densité surfacique de charges $\sigma(\theta)$ est donc égale à :

$$\sigma(\theta) = P\cos\theta = \vec{P}\cdot\vec{u}_\mathrm{r}$$

Nous retrouvons ainsi la densité surfacique de polarisation. Notons que cette densité surfacique de charges de polarisation est non uniforme, nulle à l'équateur et maximale aux pôles. Ces résultats sont en accord avec ceux que nous pouvions imaginer à partir du modèle des deux sphères décalées que nous avons proposé au début du paragraphe.

7.4. Systèmes présentant une polarisation induite : les diélectriques

Nous allons maintenant nous intéresser à des systèmes ne présentant pas de polarisation permanente. De tels systèmes sont constitués d'atomes ou de molécules, dont les moments dipolaires individuels sont soit nuls soit désorientés les uns par rapport aux autres. En absence de champ électrique extérieur, ces systèmes totalement neutres ne présentent aucune propriété électrostatique particulière. En revanche soumis à un champ externe, chaque atome ou molécule va acquérir un moment dipolaire induit sous l'influence du

champ appliqué et des champs créés par les autres dipôles induits, les dipôles permanents libres de se mouvoir dans la même direction pour donner au matériau des propriétés électrostatiques intéressantes.

Dans le paragraphe précédent, nous avons appris à calculer le champ électrique et le potentiel en utilisant la notion de charges de polarisation alors que nous connaissions au préalable la polarisation du système. Ce n'est plus le cas maintenant. Pour pouvoir connaître cette polarisation, il nous faudrait déterminer le champ électrique à l'intérieur du diélectrique. À l'échelle microscopique, le champ électrique responsable de la polarisation induite est le champ local correspondant au champ électrique moyen à l'intérieur du diélectrique diminué du champ créé par le moment induit lui-même. À l'échelle macroscopique, on peut établir une relation de proportionnalité entre la polarisation induite $\vec{P}$ et le champ électrique $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \overline{\overline{\chi}} \vec{E}$$

$\overline{\overline{\chi}}$ étant le tenseur de susceptibilité diélectrique du milieu (nous étudierons son lien avec la polarisabilité α établi par les physiciens Clausius et Mossoti). Toutefois ce champ électrique $\vec{E}$ est lui-même dépendant de la polarisation, puisque la polarisation du milieu est équivalente à l'apparition de charges de polarisation en surface et en volume qui elles-mêmes contribuent au champ électrique $\vec{E}$. Il faut donc trouver une autre procédure que celle utilisée au paragraphe 7.3.

Pour illustrer cette procédure adaptée à cette situation particulière et montrer comment, malgré cette difficulté, on peut déterminer les champs électriques intérieur et extérieur ainsi que la polarisation dans un milieu diélectrique, nous allons calculer toutes ces grandeurs sur les deux exemples correspondant aux géométries étudiées dans le paragraphe précédent.

1 Cas de la plaque diélectrique

Supposons donc une plaque constituée d'atomes ou de molécules polarisables, soumise à un champ électrique appliqué $\vec{E}_0$ uniforme.

À l'intérieur de la plaque

Commençons par calculer le champ électrique à l'intérieur du diélectrique. Ce champ électrique est égal au champ appliqué $\vec{E}_0$ augmenté du champ créé par les charges de polarisation induite. Cette dernière contribution a été calculée au paragraphe 1. Elle est égale à $-\vec{P}/\varepsilon_0$. Nous pouvons donc écrire :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{\varepsilon_0}$$

Supposons que le diélectrique soit linéaire, homogène et isotrope. Nous savons alors que la polarisation $\vec{P}$ est proportionnelle à ce champ électrique :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

Nous obtenons ainsi une équation auto-cohérente liant le champ extérieur appliqué $\vec{E}_0$ au champ à l'intérieur du diélectrique $\vec{E}$:

$$\vec{E} = \frac{1}{1+\chi}\vec{E}_0$$

Puisque la polarisation induite $\vec{P}$ est nécessairement dans le sens du champ électrique $\vec{E}$ qui la crée, la susceptibilité diélectrique est positive et le champ $\vec{E}$ à l'intérieur du diélectrique est inférieur au champ électrique appliqué $\vec{E}$. Connaissant $\vec{E}$, nous pouvons maintenant déterminer $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \frac{\chi}{1+\chi}\vec{E}_0$$

À l'extérieur de la plaque

Le champ électrique à l'extérieur de la plaque est égal au champ appliqué $\vec{E}_0$, la contribution de la plaque étant nulle comme nous l'avons vu en 1.

2 Cas de la sphère diélectrique

Supposons une sphère diélectrique de rayon R, centrée à l'origine, et soumettons-la à un champ électrique uniforme $\vec{E}_0$.

Comme précédemment, nous allons commencer par établir une équation auto-cohérente nous permettant de calculer le champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur de la sphère.

À l'intérieur de la sphère

À l'intérieur du diélectrique, le champ électrique $\vec{E}$ est égal au champ appliqué $\vec{E}_0$ augmenté du champ créé par les charges de polarisation induite. Au paragraphe 2, nous avons calculé cette contribution qui est égale à $-\vec{P}/3\varepsilon_0$. Ainsi, nous obtenons :

$$\vec{E} = \vec{E}_0 - \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

En introduisant la relation $\vec{P} = \varepsilon_0\chi\vec{E}$, nous obtenons le champ $\vec{E}$ à l'intérieur en fonction du champ appliqué $\vec{E}_0$:

$$\vec{E} = \frac{1}{1+\frac{\chi}{3}}\vec{E}_0$$

Comme dans le cas de la plaque, le champ à l'intérieur de la sphère est inférieur au champ extérieur appliqué. Notons que le coefficient de proportionnalité n'est pas le même suivant les deux géométries étudiées, le champ intérieur dépend donc de la susceptibilité du milieu mais également de sa géométrie.

Le champ intérieur étant maintenant connu, nous pouvons calculer la polarisation $\vec{P}$:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \frac{\chi}{1+\frac{\chi}{3}}\vec{E}_0$$

À l'extérieur de la sphère

Le champ à l'extérieur de la sphère diélectrique est la superposition du champ $\vec{E}_0$ et du champ électrique créé par un dipôle $\vec{\mathcal{P}}$ placé au centre de la sphère avec, en reprenant les résultats du paragraphe 2 :

$$\vec{\mathcal{P}} = \frac{4\pi}{3} R^3 \varepsilon_0 \frac{\chi}{1 + \frac{\chi}{3}} \vec{E}_0$$

7.5. Le vecteur déplacement $\vec{D}$

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié les lois fondamentales de l'électrostatique auxquelles obéissent les charges électriques dans le vide. Nous avons vu que leur formulation mathématique permettait de construire des méthodes simples pour calculer les champs et les potentiels et nous avons largement étudié en particulier les possibilités offertes par le théorème de Gauss. La puissance de ces méthodes est liée à la forme des deux équations que doit vérifier le champ électrique :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = 0$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Bien entendu, les deux équations précédentes demeurent valables si nous remplaçons le vide par un milieu diélectrique. Toutefois il faudra inclure dans la densité de charges ρ, non seulement les charges initiales dites « libres » (charges placées en surface ou immergées en volume par bombardement qui ne sont pas libres de se déplacer mais dont nous pouvons faire varier le nombre à volonté) mais également les charges de polarisation induites dans le diélectrique (charges parfois appelées « charges liées »). Or il n'est pas toujours simple de déterminer ces dernières et donc l'utilisation directe des équations précédentes et des théorèmes qui s'y rattachent n'est pas toujours commode.

Aussi est-il judicieux d'introduire une nouvelle grandeur électrostatique, le vecteur déplacement électrique $\vec{D}$. L'intérêt de ce vecteur réside dans le fait que les deux équations fondamentales auxquels il obéit ne font appel qu'aux charges « libres » que nous contrôlons et dont nous connaissons a priori la distribution. En levant cette indétermination, nous pourrons appliquer à $\vec{D}$, dans le diélectrique, tous les résultats que nous connaissions pour $\vec{E}$ dans le vide.

1 Définition du vecteur déplacement

Nous allons construire maintenant le vecteur $\vec{D}$. Considérons donc le système des charges « libres » caractérisées par une densité volumique ρ_{lib}, immergées dans un diélectrique. L'effet de polarisation du diélectrique se caractérisera par une densité de charges de polarisation induite ρ_{pol}. Le potentiel électrostatique V doit vérifier en tout point l'équation de Poisson :

$$-\nabla^2 V = \frac{\rho_{lib} + \rho_{pol}}{\varepsilon_0}$$

Nous pouvons alors établir une équation relative au champ électrique $\vec{E}$ en introduisant $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$ et la définition de la densité de charges de polarisation $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$. Nous obtenons ainsi :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{lib}}{\varepsilon_0} - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{\varepsilon_0}$$

Nous pouvons alors définir le vecteur déplacement $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ qui vérifie l'équation locale :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + P) = \rho_{lib}$$

La structure de cette équation montre que les propriétés du champ électrique $\vec{E}$ créé par des charges dans le vide se transposent au vecteur déplacement $\vec{D}$ si ces charges sont immergées dans un milieu diélectrique. En particulier, nous pourrons appliquer le théorème de Gauss au vecteur déplacement en nous limitant aux charges « libres » pour ensuite en déduire $\vec{E}$ et $\vec{P}$. Cette méthode est très commode lorsque l'on contrôle les charges « libres », soulignons toutefois que la plupart du temps, il est plus facile de contrôler la différence de potentiel des corps environnant les diélectriques : dans ce cas, il conviendra de commencer par déterminer $\vec{E}$ pour ensuite en déduire $\vec{D}$ et $\vec{P}$.

Dans un diélectrique homogène isotrope et linéaire, on peut aller un peu plus loin. En effet, dans un tel diélectrique, la polarisation est proportionnelle au champ, ($\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$) : aussi pouvons-nous écrire le vecteur déplacement sous la forme

$$\vec{D} = \varepsilon_0(1 + \chi)\vec{E} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

$\varepsilon_r = (1 + \chi)$ est la « permittivité relative » et $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$, la « constante diélectrique » du milieu. Dans un tel milieu, la proportionnalité entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$ nous permet d'écrire

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \varepsilon \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho_{lib}$$
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{D} = 0$$

En d'autres termes, cela veut dire que le champ électrique créé par une distribution de charges immergées dans un milieu « diélectrique » isotrope homogène se calcule comme dans le vide, à condition de remplacer la constante diélectrique de vide ε_0 par celle du milieu ε.

Substances	Conditions	ε_r
air	0 °C, 1 atm (gaz)	1,00005
HCl	0 °C, 1 atm (gaz)	1,0046
S	20 °C (cristal)	4
eau	110 °C 1 atm (gaz)	1,0126
eau	20 °C (liquide)	80
argon	193 °C (liquide)	1,53
paraffine	20 °C (solide)	2,1
porcelaine	20 °C (solide)	6,0-8,0
polyéthylène	20 °C (solide)	4,1
verre pyrex	–	4

Fig. 7.8. Constantes diélectriques de quelques substances.

Recheche & Développement

Solvatation d'un ion

Que se passe-t-il lorsqu'on dissout un composé ionique dans un liquide polaire ? Chaque ion crée, à l'échelle atomique ou moléculaire, un champ électrique intense qui va interagir avec les molécules polaires du solvant, Ces molécules vont s'organiser autour de l'ion, chaque ion va ainsi être habillé par un ensemble de molécules du solvant, sa charge est ainsi écrantée par la présence des dipôles ce qui conduit à une interaction effective ion-ion réduite. On parlera d'ions solvatés et de processus de solvatation. Notons que dans ce processus de dissolution du composé ionique, l'énergie nécessaire à la séparation des différentes espèces ioniques est essentiellement fournie par le travail des forces électrostatiques liées au déplacement et à la réorganisation des molécules polaires. Par exemple, la dispersion des ions d'un cristal de KCl nécessite une énergie de 169 kcal/mole, tandis que les énergies électrostatiques de solvatation des ions K^+ et Cl^- dans l'eau apportent respectivement 77 kcal/mole et 87 kcal/mole.

2 Propriétés du vecteur déplacement

Nous allons maintenant généraliser au vecteur déplacement le comportement du champ électrique lors de la traversée d'une interface que nous avons étudié au chapitre 3. En considérant la surface séparant deux milieux, nous étudierons successivement les comportements des composantes normale et tangentielle de ce vecteur.

Comportement de la composante normale D_n au passage d'une interface

Nous venons de démontrer que, par construction, le théorème de Gauss pouvait s'appliquer au vecteur déplacement. Considérons donc la surface de Gauss constituée par un cylindre, commun aux deux milieux d'axe perpendiculaire à la surface de séparation, de hauteur très petite devant la surface des bases (fig. 7.9). Selon le théorème de Gauss nous avons

$$\iint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_S D_n \, \mathrm{d}S = \rho_{lib}$$

D_n, étant la composante normale à la surface du vecteur déplacement.

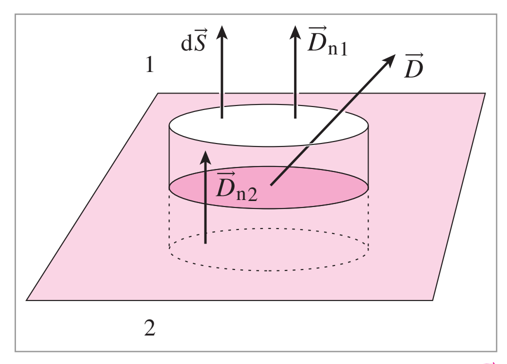


Fig. 7.9. Propriété de la composante normale de $\vec{D}$ au passage d'une interface.

Cette équation, équivalente à une équation de conservation du flux de $\vec{D}$, nous permet d'écrire :

$$D_{n1} - D_{n2} = \sigma_{lib}$$

σ_{lib} étant la densité surfacique de charges libres à l'interface.

Si l'interface sépare deux milieux diélectriques, la densité de charges libres en surface est généralement nulle, on a donc une continuité de la composante normale du vecteur déplacement $\vec{D}$ sur la surface de séparation entre deux diélectriques. En revanche, si

l'interface sépare un conducteur et un diélectrique, il y a des charges libres à la surface du conducteur, il existe alors une discontinuité dans la composante normale de $\vec{D}$ au passage de l'interface : D_n est nulle à l'intérieur du conducteur (comme $\vec{E}$) et égale à la densité surfacique de charges libres dans le diélectrique.

7.6. Capacité et diélectrique

L'une des principales applications des propriétés des milieux diélectriques est liée à la possibilité qu'ils offrent d'augmenter la capacité d'un condensateur.

Considérons un condensateur plan, les deux armatures étant séparées par une épaisseur h de vide. Si nous appliquons une différence de potentiel aux bornes de ce condensateur, il apparaît des charges de signes opposés sur les deux armatures A et B. Les charges et la différence de potentiel sont proportionnelles et liées par la relation :

$$Q_A = -Q_B = C(V_A - V_B)$$

C étant définie comme la capacité du condensateur dans le vide.

Immergeons maintenant ce condensateur dans un milieu diélectrique ou plus simplement introduisons une lame diélectrique remplissant totalement l'espace entre les deux armatures. Comment vont être modifiées les caractéristiques du condensateur ?

Nous commencerons par raisonner en supposant que le condensateur a été au préalable isolé, les charges sur les armatures en présence du diélectrique étant égales à celles existant lorsque le condensateur était dans le vide. Les charges sur les armatures (« libres » au sens défini précédemment au paragraphe 7.5) induisent une polarisation du milieu diélectrique. Nous avons vu que cette polarisation crée une contribution au champ électrique dans le diélectrique de la forme $-\vec{P}/\varepsilon_0$. En suivant la procédure présentée au paragraphe 1, nous pouvons calculer le champ électrique $\vec{E}$ entre les armatures :

$$\vec{E} = \frac{1}{1+\chi}\vec{E}_0$$

$\vec{E}_0$ étant le champ électrique créé par les charges Q et $-Q$. Si nous calculons la circulation de ce champ $\vec{E}$ entre A et B, nous obtenons :

$$V_A - V_B = hE = \frac{1}{1+\chi}hE_0$$

En introduisant la relation obtenue lorsque le condensateur était dans le vide, $hE_0 = Q_A/C$, nous obtenons une nouvelle relation entre la charge et la différence de potentiel développée entre les armatures :

$$V_A - V_B = \frac{1}{1+\chi}\frac{Q_A}{C} = \frac{Q_A}{C'}$$

Par définition de la capacité, C' est la capacité du condensateur en présence du diélectrique :

$$C' = (1+\chi)C$$

La capacité d'un condensateur plan, de surface S et d'épaisseur h, est égale dans le vide à $C = \frac{\varepsilon_0 S}{h}$ tandis que dans un milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope, nous aurons :

$$C' = \frac{(1+\chi)\varepsilon_0 S}{h} = \frac{\varepsilon S}{h}$$

$\varepsilon = \varepsilon_r \varepsilon_0$ étant la constante diélectrique du milieu et ε_r la constante diélectrique relative.

Nous obtenons bien entendu le même résultat si nous supposons que le condensateur, au lieu d'être isolé, est maintenu à potentiel constant. Dans ce cas, nous décrirons la polarisation du milieu par l'apparition de charges de polarisation à la surface du diélectrique. Attirées par influence, de nouvelles charges « libres » vont apparaître sur les armatures du condensateur. La densité surfacique totale σ' de charges « sur » les armatures est égale à la somme des charges libres de l'une des armatures de densité σ_{lib} (celles présentes à l'origine augmentées de celles arrivées par influence) et des charges de polarisation dues au diélectrique :

$$\sigma' = \sigma_{\text{lib}} + \vec{P} \cdot \vec{n}$$

$\vec{n}$ étant la normale sortante à la surface du diélectrique. On a donc

$$\sigma_{\text{lib}} = \sigma' - \vec{P} \cdot \vec{n}$$

Le champ électrique $\vec{E}$ à l'intérieur du condensateur est dû à la totalité des charges se trouvant sur les armatures, charges caractérisées par la distribution σ' des charges. Nous aurons donc :

$$\vec{E} = \frac{\sigma'}{\varepsilon_0} \vec{n}' \qquad \text{et} \qquad \vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

avec $\vec{n}'$ vecteur normal à l'armature.

En supposant que le potentiel V_A soit supérieur au potentiel V_B, la polarisation étant donc orientée selon le champ $\vec{E}$ de A vers B, nous obtenons l'expression de la densité de charges « libres » sur l'armature A :

$$\sigma_{\text{lib}} = \varepsilon_0 E - P = \varepsilon_0 E + \varepsilon_0 \chi E = (1+\chi)\varepsilon_0 E$$

qui correspond à la charge totale libre Q'_A sur l'armature A :

$$Q'_A = \sigma_{\text{lib}}$$

$$S = (1+\chi)\varepsilon_0 E S$$

En introduisant la différence de potentiel $V_A - V_B$ et les capacités C' et C nous obtenons l'équation :

$$C'(V_A - V_B) = (1+\chi)C(V_A - V_B)$$

$$C' = (1+\chi)C$$

Nous retrouvons ainsi la relation obtenue précédemment en considérant la charge comme étant maintenue constante sur les armatures.

Compléments : notion de champ local

Nous allons calculer le champ électrique local $\vec{E}_{\text{loc}}$ auquel est soumis un atome ou une molécule dans un matériau. Ce champ électrique est constitué du champ extérieur appliqué $\vec{E}_0$ et des champs dus à la polarisation de tous les atomes ou molécules autres que celui pour lequel nous calculons le champ local. Cela correspond donc au champ électrique macroscopique à l'intérieur du diélectrique diminué de la contribution d'un atome ou d'une molécule.

Il est évident que le calcul exact demanderait une connaissance détaillée de la forme de l'atome ou de la molécule et de la distribution de charge correspondante. Nous allons effectuer ici un calcul approché de cette contribution. Pour ce faire, nous allons faire plusieurs hypothèses :

- la charge totale de la molécule est nulle, le champ électrique moléculaire ne sera pas un champ crée par une charge ponctuelle mais au mieux un champ électrique créé par un dipôle ;
- la densité de charge totale est également nulle en tout point de la molécule, les densités de charge positives et négatives sont égales ;
- la molécule est sphérique.

Sous l'influence du champ auquel elles sont soumises, les charges positives et négatives de la molécule se déplacent légèrement pour former un dipôle induit. Le champ « intérieur » créé par cette distribution a été calculé au paragraphe 2 en appliquant le théorème de Gauss aux deux distributions homogènes sphériques positives et négatives :

$$\vec{E}_{\text{mol}} = -\frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

expression dans laquelle $\vec{P}$ est la polarisation du milieu. Nous obtenons ainsi l'expression du champ local :

$$\vec{E}_{\text{loc}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

Le coefficient $1/3$ dans l'expression de E_{loc} n'est formellement valable que pour une distribution de charges sphérique, toutefois les résultats expérimentaux semblent indiquer que ce coefficient reste correct dans de nombreux cas.

Relation de Clausius-Mossotti

La relation de Clausius-Mossotti lie la constante diélectrique macroscopique à la polarisabilité microscopique des atomes ou molécules. Nous avons par définition de la susceptibilité χ :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E}$$

$\vec{P}$ correspond à la polarisation par unité de volume du matériau considéré :

$$\vec{P} = N\vec{p}$$

expression dans laquelle N représente la densité de dipôles atomiques ou moléculaires induits $\vec{p}$. Chacun de ces dipôles est induit par le champ électrique local $\vec{E}_{\text{loc}}$, son

intensité étant proportionnelle à la polarisabilité α de l'atome ou de la molécule :

$$\vec{P} = N\alpha\vec{E}_{\text{loc}}$$

Le champ local $\vec{E}_{\text{loc}}$ et le champ $\vec{E}$ sont liés par la relation :

$$\vec{E}_{\text{loc}} = \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\varepsilon_0}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\vec{P} = \frac{N\alpha\varepsilon_0}{1 - N\frac{\alpha}{3}}\vec{E}$$

et par identification nous obtenons l'expression de la susceptibilité :

$$\chi = \frac{N\alpha}{\varepsilon_0 - N\frac{\alpha}{3}}$$

que nous pouvons réécrire en fonction de la constante diélectrique relative $\varepsilon_r = 1 + \chi$:

$$\frac{N\alpha}{3} = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 2}\varepsilon_0$$

Un peu d'histoire

Relation de Clausius-Mossotti

Poisson avait proposé en 1824 l'idée de « fluides boréal et austral » se séparant à l'échelle microscopique pour créer les propriétés macroscopiques des matériaux magnétiques. En 1847, Mossoti transposa ce type d'analyse pour déterminer les propriétés macroscopiques des diélectriques à partir d'une représentation microscopique de ces matériaux.

Exercices

1 Dans la molécule d'acide chlorhydrique HCl, la distance entre le noyau de chlore et celui d'hydrogène est de 1,28 Å. Un modèle électronique de cette molécule dans lequel l'électron de l'atome d'hydrogène serait entièrement transféré à l'atome de chlore et se joindrait aux 17 électrons de celui-ci pour former une charge négative sphérique symétrique, centrée sur le noyau de chlore permet-il de retrouver le moment dipolaire expérimental de 1,08 D ? En utilisant cette valeur expérimentale, calculer la distance entre le barycentre des charges négatives et le noyau d'hydrogène.

2 Dans les molécules de méthane CH_4 et de chlorure de carbone CCl_4, le carbone est au centre d'un tétraèdre dont les autres atomes de la molécule occupent les sommets. Quel est leur moment dipolaire ?

3 Une charge ponctuelle q est placée au centre d'une petite cavité de rayon R' creusée au centre d'un matériau isolant de forme sphérique de rayon R et de constante diélectrique relative ε_r.

a. Calculer les modules en tout point de l'espace, des vecteurs déplacement, champ électrique et polarisation. Quelles sont leurs direction et sens ?

b. Montrer qu'il n'y a pas de charges libres ni de charges de polarisation en volume dans le diélectrique.

c. Calculer les charges de polarisation sur les surfaces du diélectrique et la charge totale contenue dans une sphère de rayon r telle que

$$R' < r < R$$

4 Entre les plaques d'un condensateur plan se trouve un diélectrique dont la permittivité relative varie linéairement d'une plaque à l'autre. Soient ε_{r1} et ε_{r2} les valeurs sur les deux plaques (avec $\varepsilon_{r1} > \varepsilon_{r2}$) et e la distance entre les plaques. Montrer que la capacité par unité de surface vaut :

$$\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_{r1} - \varepsilon_{r2})}{e \ln\left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\right)}$$

5 On place une sphère de rayon R, au centre d'un condensateur constitué de deux plaques distantes de e et de surface S suffisamment grande pour qu'on puisse négliger les effets de bords. On charge le condensateur sous une différence de potentiel V.

a. Calculer le champ en tout point de l'espace suivant que la sphère est métallique ou constituée d'un matériau isolant de constante diélectrique relative ε_r.

b. Tracer dans les deux cas, quelques lignes de champ et surfaces équipotentielles dans un plan diamétral de la sphère et perpendiculaire aux armatures.

6 On comble l'espace existant entre les deux conducteurs sphériques de l'exercice 8, par un isolant de constante diélectrique relative ε_r. Calculer la capacité du condensateur constitué par les deux conducteurs sphériques et le diélectrique. On remplace la coquille sphérique conductrice introduite dans l'exercice 8 du chapitre 6, par une coquille sphérique concentrique isolante de constante diélectrique relative ε_r, de rayon intérieur $R = 2R_1$ et de rayon extérieur $R' = 3R_1$. Calculer la capacité du condensateur constitué par les deux conducteurs sphériques et le diélectrique. Comparer à celle du système constitué par les trois conducteurs sphériques.

Chapitre 8

Énergie électrostatique

Pour conclure cette partie concernant l'électrostatique, nous introduirons la notion d'énergie électrostatique associée à un ensemble de charges fixes. Après avoir donné diverses expressions de cette énergie, nous en déduirons les forces et les moments de forces s'exerçant dans un champ électrostatique.

8.1 Énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles

1 Expression de l'énergie en fonction des charges électriques

2 Expression de l'énergie en fonction du potentiel électrique

8.2 Énergie électrostatique associée à une distribution continue de charges

1 Expression de l'énergie électrostatique dans le vide

2 En présence de matériaux diélectriques linéaires

3 Expression de l'énergie électrostatique en fonction du potentiel

4 Énergie de polarisation

8.3 Énergie associée à un ensemble de conducteurs à l'équilibre

1 Cas d'un ensemble de conducteurs à l'équilibre

2 Énergie associée à un condensateur

8.4 Forces et moments de forces

1 Force sur les armatures d'un condensateur

2 Moments de forces sur les armatures d'un condensateur

3 Force exercée sur un matériau non conducteur

Mots-clés

- **Énergie électrostatique**
- **Force**
- **Moment de force**

8.1. Énergie électrostatique d'un système de charges ponctuelles

Considérons un ensemble de charges électriques q_i dont les positions $\vec{r}_i$ sont fixées. L'ensemble des couples $(q_i, \vec{r}_i)$ caractérise l'état de ce système de charges ponctuelles. À chaque état correspond une énergie électrostatique U_e définie comme le travail total nécessaire à un opérateur extérieur au système pour amener toutes les charges q_i de l'infini à leur position finale $\vec{r}_i$, l'énergie de l'état « toutes les charges sont infiniment éloignées les unes des autres » étant retenue comme origine des énergies. C'est l'énergie disponible potentiellement dans le système, celle que l'on pourra récupérer si on laisse toutes les charges retourner à l'infini (on parle d'« énergie libre »). Notons de plus que dans cette définition, l'énergie électrostatique ne prend en compte ni l'énergie nécessaire à la création initiale des charges ni celle nécessaire à la constitution du milieu dans lequel elles sont placées.

1 Expression de l'énergie en fonction des charges électriques

Pour calculer cette énergie U_e, il convient d'amener une à une les charges q_i et d'évaluer à chaque fois l'énergie nécessaire à cette opération, l'énergie U_e étant la somme de toutes ces contributions. Commençons par amener la charge q_1 au point $\vec{r}_1$. La mise en place de cette charge ne nécessite aucune énergie, ni pour sa création (par hypothèse) ni pour son déplacement de l'infini à $\vec{r}_1$ puisqu'elle est seule dans le vide. Pour amener la seconde charge q_2 en $\vec{r}_2$, il faut fournir le travail W_2 qui a pour expression :

$$W_2 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|}$$

Ces deux charges se trouvant maintenant à leurs positions finales, pour amener une troisième charge q_3 en $\vec{r}_3$, il faudra lui fournir le travail W_3 :

$$W_3 = \frac{q_3 q_1}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}_3 - \vec{r}_1\right|} + \frac{q_3 q_2}{4\pi\varepsilon_0 \left|\vec{r}_3 - \vec{r}_2\right|}$$

Ainsi, de façon générale, l'énergie requise pour amener une j-ème charge q_j au point $\vec{r}_j$ a pour expression :

$$W_j = q_j \sum_{i<j} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \tag{8.1}$$

avec $r_{ij} = \left|\vec{r_j} - \vec{r_i}\right|$. L'énergie totale U_e qui est nécessaire pour amener le système de charges dans l'état $(q_i, \vec{r}_i)$ est, par définition, simplement égale à la somme de toutes les contributions de type 8.1. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{aligned} U_e &= \sum_j W_j = \sum_{i,i<j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \\ U_e &= \frac{1}{2} \sum_{j,i\neq j} \frac{q_i q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}} \end{aligned} \tag{8.2}$$

Dans cette dernière expression, le facteur $\frac{1}{2}$ apparaît pour corriger le fait que, en faisant la somme sur tous les i et j, on compte chaque terme deux fois alors qu'il n'est à considérer qu'une seule fois.

2 Expression de l'énergie en fonction du potentiel électrique

Nous pouvons également écrire cette énergie U_e en fonction du potentiel $V(\vec{r}_i)$ créé au point $\vec{r}_i$ par l'ensemble des autres charges ponctuelles q_j. Par définition, ce potentiel s'écrit :

$$V(\vec{r}_i) = \sum_{j \neq i} \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0 r_{ij}}$$

L'expression 8.2 de l'énergie peut ainsi s'écrire en fonction du potentiel sous la forme :

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i q_i V(\vec{r}_i) \qquad (8.3)$$

Recheche & Développement

Puissance dissipée dans un éclair

La Terre est entourée à haute altitude, à environ 50 km du sol, par la ionosphère. Il s'agit là d'un ensemble de molécules ionisées par le rayonnement solaire qui est maintenu à un potentiel voisin de $5 \cdot 10^5$ V, le sol étant considéré comme étant au potentiel nul. Ainsi, il existe un champ moyen entre la ionosphère et le sol d'environ 10 V/m. Ce champ électrique peut être fortement modifié par temps d'orage. Considérons en effet un nuage d'orage chargé électriquement. Sa charge Q est alors d'environ 10 coulombs et il se situe à une altitude h voisine de 5 km. Ses dimensions latérales étant petites, on peut considérer ce nuage comme une charge ponctuelle créant un champ électrique $E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{h^2}$ et un potentiel $V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{h}$ respectivement d'environ $4 \cdot 10^3$ V/m et de $2 \cdot 10^7$ V. Ces champs électriques sont suffisants pour ioniser l'air entre le nuage et la Terre (éclair), permettant ainsi l'écoulement des charges accumulées. La durée τ d'un éclair étant de l'ordre de 10^{-2} s, la puissance dissipée $P = \frac{VQ}{\tau}$ qui lui est associée est d'environ 10^{10} watts.

8.2. Énergie électrostatique associée à une distribution continue de charges

Dans le cas d'un système constitué par une distribution continue de charges, l'état du système sera caractérisé par la densité volumique de charge $\rho(\vec{r})$ au point $\vec{r}$. Pour évaluer l'énergie caractérisant cet état, nous allons procéder comme dans le cas discret. Nous commencerons par déterminer le travail nécessaire pour augmenter la densité de charges $x\rho(\vec{r})$ $(0 < x < 1)$, caractérisant un état intermédiaire, de la quantité $\mathrm{d}\rho(\vec{r})$ en amenant

ces charges de l'infini, puis nous calculerons la somme de toutes ces contributions pour passer de l'état d'un système ne contenant pas de charges ($x = 0$) à celui caractérisé par la distribution finale ($x = 1$). Rappelons que dans cette procédure, nous n'évaluons que l'énergie associée aux charges libres de se déplacer, en particulier nous ne prenons pas en compte l'énergie qui a été nécessaire pour constituer le milieu lui-même. Le point $\vec{r}$ se trouvant au potentiel $V(r)$, le travail nécessaire à la première opération est égal par définition à :

$$\mathrm{d}\,U_{\mathrm{e}} = \iiint_{\mathrm{V}} \mathrm{d}\,\rho_{\mathrm{lib}}(\vec{r})V(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau \tag{8.4}$$

Pour pouvoir discuter simplement les différentes situations physiques rencontrées, nous allons exprimer cette contribution en fonction du champ de déplacement $\vec{D}$ qui satisfait l'équation :

$$\vec{\nabla} \cdot \mathrm{d}\,\vec{D} = \mathrm{d}\,\rho_{\mathrm{lib}}(\vec{r})$$

Nous obtenons ainsi :

$$\mathrm{d}\,U_{\mathrm{e}} = \iiint_{\mathrm{V}} (\vec{\nabla} \cdot \mathrm{d}\,\vec{D})V(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau \tag{8.5}$$

En exploitant l'identité vectorielle $(\vec{\nabla} \cdot \mathrm{d}\,\vec{D})V = \vec{\nabla} \cdot (V\,\mathrm{d}\,\vec{D}) - \mathrm{d}\,\vec{D} \cdot \vec{\nabla} V$, nous pouvons réécrire cette équation :

$$\mathrm{d}\,U_{\mathrm{e}} = \iiint \vec{\nabla} \cdot (V\,\mathrm{d}\,\vec{D})\,\mathrm{d}\tau - \iiint \mathrm{d}\,\vec{D} \cdot \vec{\nabla} V\,\mathrm{d}\tau \tag{8.6}$$

$$\mathrm{d}\,U_{\mathrm{e}} = \iiint \vec{\nabla} \cdot (V\,\mathrm{d}\,\vec{D})\,\mathrm{d}\tau + \iiint \mathrm{d}\,\vec{D} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}\tau$$

Considérons la première de ces intégrales. Dans l'expression 8.4, l'intégration n'a de sens que sur le volume dans lequel la densité de charge est non nulle, l'attribution d'une densité nulle aux autres régions n'étant introduite que pour étendre artificiellement l'intégration à tout l'espace. Nous pouvons donc, sans négliger aucune contribution, restreindre provisoirement le domaine d'intégration à un volume sphérique fermé $\tilde{V}$ limité par la surface enveloppe S englobant toutes les charges du système considéré. La première intégrale de volume se transforme alors en intégrale de surface par la formule de Green :

$$\iiint_{\tilde{\mathrm{V}}} \vec{\nabla} \cdot (V\,\mathrm{d}\,\vec{D})\,\mathrm{d}\tau = \iint_{\mathrm{S}} V\,\mathrm{d}\,\vec{D} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S}$$

Le second membre de cette équation correspond par définition au flux du vecteur $V\,\mathrm{d}\,\vec{D}$ à travers la surface S (l'analogie avec le théorème de Gauss est immédiate). Mais le volume $\tilde{V}$, choisi arbitrairement, peut être aussi grand que l'on veut, en particulier beaucoup plus grand que le volume réel occupé par la distribution de charges. Dans ces conditions, vu de la surface S, le système de charges peut être assimilé à une charge ponctuelle située au centre de la sphère $\tilde{V}$ (de rayon R). Le champ $\vec{D}$ et le potentiel V que crée la distribution varient alors sur la surface S respectivement comme R^{-2} et R^{-1}.

La surface S variant comme R^2, le flux de $V\vec{D}$ sortant de S varie comme R^{-1}. Ainsi, lorsque l'on fait tendre R vers l'infini pour retrouver un domaine d'intégration étendu à tout l'espace, ce flux tend vers 0. Nous pouvons donc négliger le premier terme de l'expression 8.6. L'énergie électrostatique se réduit donc à :

$$\mathrm{d}\,U_\mathrm{e} = \iiint \mathrm{d}\vec{D} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}\tau \tag{8.7}$$

l'intégration se faisant de nouveau sur tout l'espace. Il ne nous reste plus maintenant qu'à calculer la somme de toutes ces contributions pour déterminer l'énergie électrostatique du système caractérisé par la densité ρ_lib, c'est-à-dire en faisant varier $\vec{D}$ d'une valeur initiale nulle à sa valeur finale. Pour effectuer cette dernière opération, il est bien entendu nécessaire de connaître la relation constitutive entre le vecteur déplacement $\vec{D}$ et le champ électrique $\vec{E}$. Dans le cas le plus général, cette relation peut être compliquée et la sommation rendue difficile. Nous n'étudierons ici que deux cas particuliers, correspondant néanmoins aux cas les plus fréquemment rencontrés.

1 Expression de l'énergie électrostatique dans le vide

Dans le vide, la relation entre $\vec{D}$ et $\vec{E}$ est de la forme : $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$. En remplaçant dans la relation 8.7, nous obtenons :

$$\mathrm{d}\,U_\mathrm{e} = \varepsilon_0 \iiint \mathrm{d}\vec{E} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}\tau$$

En intégrant cette contribution infinitésimale entre la valeur nulle et la valeur finale de $\vec{E}$, nous obtenons une expression de l'énergie électrostatique du système sous la forme :

$$U_\mathrm{e} = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint \vec{E} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}\tau \tag{8.8}$$

Cette expression de l'énergie électrostatique est la plus complète que nous puissions donner en absence de matériaux diélectriques (on peut montrer que cette expression de l'énergie est toujours vraie en absence de diélectriques, que le champ électrique soit statique ou non).

2 En présence de matériaux diélectriques linéaires

Nous nous limiterons au cas d'un milieu diélectrique linéaire. Dans ce cas, le champ de déplacement $\vec{D} = \varepsilon\vec{E}$ est simplement proportionnel au champ électrique $\vec{E}$. L'énergie électrostatique a alors pour expression :

$$U_\mathrm{e} = \frac{\varepsilon}{2} \iiint \vec{E} \cdot \vec{E}\,\mathrm{d}\tau \tag{8.9}$$

3 Expression de l'énergie électrostatique en fonction du potentiel

Les expressions 8.8 et 8.9 peuvent se réécrire toutes deux en fonction du potentiel $V(\vec{r})$:

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint \rho_{lib} V \, d\tau$$

expression qui ressemble à une généralisation de l'expression 8.3 dans le cas d'une distribution continue de charges. Il est toutefois important de noter qu'elle ne pourra être utilisée que pour un système de charges placées dans le vide ou dans un milieu diélectrique linéaire. En effet, la sommation de toutes les contributions de la forme 8.4 ne conduit à cette dernière expression que lorsque le potentiel V est proportionnel à la densité de charges libres ρ_{lib}, ce qui n'est vrai que dans ces deux cas.

4 Énergie de polarisation

Il est parfois utile de déterminer l'énergie, dite de « polarisation », associée à la présence du milieu diélectrique. Cette distinction entre les différentes contributions énergétiques est un peu arbitraire puisque la polarisation du milieu dépend elle-même des charges libres en présence, aussi faut-il plutôt comprendre cette énergie de polarisation comme la différence d'énergie ΔU_e du système de charges libres en présence ou en absence du milieu diélectrique.

Dans le cas d'un matériau diélectrique linéaire, nous obtenons ainsi :

$$\Delta U_e = \frac{\varepsilon_0}{2} \iiint \vec{E} \cdot \vec{E} \, d\tau - \frac{\varepsilon}{2} \iiint \vec{E} \cdot \vec{E} \, d\tau = \frac{1}{2} \iiint (\varepsilon_0 - \varepsilon) \vec{E} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

En introduisant la polarisation :

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi \vec{E} = (\varepsilon_0 - \varepsilon) \vec{E}$$

cette énergie peut se réécrire en fonction de la polarisation :

$$\Delta U_e = -\frac{1}{2} \iiint \vec{P} \cdot \vec{E} \, d\tau \qquad (8.10)$$

Cette énergie de polarisation est simplement l'énergie associée à la création des dipôles induits et à l'orientation des dipôles permanents lorsqu'on amène les charges libres de l'infini à leurs positions finales.

8.3. Énergie associée à un ensemble de conducteurs à l'équilibre

1 Cas d'un ensemble de conducteurs à l'équilibre

Considérons maintenant un ensemble de conducteurs indicés par i, à l'équilibre dans un milieu quelconque. Cet équilibre est caractérisé par l'ensemble des valeurs des charges Q_i

et des potentiels V_i associés à chacun des conducteurs, ces charges étant par définition réparties à la surface des conducteurs avec une densité surfacique σ_i.

En appliquant la relation 8.4 et en utilisant le fait que chaque conducteur est une équipotentielle V_i, nous obtenons l'énergie électrostatique associée à ce système :

$$U_e = \frac{1}{2} \iiint \rho_{lib}(\vec{r}) V(\vec{r}) \, d\tau = \frac{1}{2} \sum_i V_i \iint \sigma_i(\vec{r}) \, dS_i \tag{8.11}$$

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$$

Dans cette expression S_i représente la surface du conducteur i. Cette énergie s'exprime également en fonction des potentiels V_i et des capacités mutuelles C_{ij} introduites chapitre 6. En effet, la charge Q_i dépend linéairement des potentiels V_j :

$$Q_i = \sum_i C_{ij} V_j \tag{8.12}$$

Nous obtenons ainsi :

$$U_e = \frac{1}{2} \sum_{ij} C_{ij} V_i V_j \tag{8.13}$$

Nous pourrions obtenir une relation symétrique décrivant l'énergie uniquement en fonction des charges portées par les conducteurs en inversant la relation 8.12.

2 Énergie associée à un condensateur

Par définition, un condensateur est un système de deux conducteurs en influence totale. Si nous soumettons les armatures indicées 1 et 2 d'un tel système à une différence de potentiel $V = V_1 - V_2$, il apparaît sur les armatures des charges $Q_1 = -Q_2 = Q = CV$, C étant la capacité du condensateur. L'énergie U_e associée à ces charges libres, habituellement appelée « énergie du condensateur U_c », est obtenue en appliquant la relation 8.3 :

$$U_c = \frac{1}{2}(Q_1 V_1 - Q_2 V_2) = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \tag{8.14}$$

$$U_c = \frac{1}{2} C V^2$$

Cette énergie U_c joue un rôle très important dans l'étude des condensateurs. Elle correspond notamment à l'énergie que le générateur doit fournir au condensateur pour le charger. On peut se persuader de ce résultat en calculant l'énergie dU nécessaire pour amener la charge supplémentaire dq sur l'armature portant au préalable la charge q, c'est-à-dire se trouvant au potentiel $V(q) = q/C$ puis en intégrant cette énergie infinitésimale entre l'état initial (charge nulle) et l'état final (charge Q) :

$$dU = V(q) \, dq = \frac{1}{C} q \, dq$$

$$U_c = \int \frac{1}{C} q \, dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

L'énergie U_c est donc l'énergie emmagasinée dans le condensateur au cours du processus d'accumulation de charge sur ses armatures. Elle sera restituée lors de sa décharge. En effet, considérons le circuit électrique ouvert constitué par le condensateur de capacité C dont les armatures sont préalablement chargées $(Q, -Q)$ et d'une résistance R, le courant $I > 0$ étant conventionnellement orienté vers l'armature chargée Q. À l'instant $t = 0$, fermons l'interrupteur ; le condensateur en se déchargeant va créer un courant $I = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}t$ dont la loi d'évolution va obéir à l'équation :

$$\frac{Q(t)}{C} + RI(t) = 0$$

$$I(t) + RC\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$

À chaque instant le courant sera égal à :

$$I(t) = -\frac{Q}{RC}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$$

L'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance est donc égale à :

$$U_{\text{dissipée}} = \frac{Q^2}{RC^2}\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\frac{2t}{RC}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = U_c$$

Condensateur plan dans le vide

La capacité C_0 d'un condensateur plan placé dans le vide est égale à $\varepsilon_0 S/h$, S et h étant respectivement la surface des armatures et leur espacement. L'énergie du condensateur s'écrit alors :

$$U_c = \frac{1}{2}C_0V^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2Sh$$

Nous retrouvons là le résultat 8.8, dans lequel le volume S_h représente le volume occupé par les lignes de champ, c'est-à-dire la région de l'espace dans laquelle le champ électrique $\vec{E}$ est non nul, dans l'approximation du condensateur plan.

Condensateur plan dans un diélectrique

Considérons maintenant le même condensateur et plaçons-le dans un milieu diélectrique ou isolant. Au chapitre 7, nous avons montré que la densité surfacique de charges libres apparaissant sur une armature n'est plus égale à $\varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{n}$ ($\vec{n}$ étant le vecteur normal à la surface) comme dans le vide mais est égale à $(\varepsilon_0\vec{E}+\vec{P})\cdot\vec{n} = \vec{D}\cdot\vec{n}$. Dans le cas d'un milieu diélectrique linéaire uniforme, cette influence du milieu polarisable peut être prise en compte en considérant une capacité $C' = \varepsilon_r C_0$, ε_r étant la constante diélectrique relative du milieu. Nous obtenons dans ce cas l'énergie du condensateur sous la forme :

$$U_c = \frac{1}{2}C'V^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_r\varepsilon_0E^2Sh = \frac{1}{2}DESh$$

$$U_c = \frac{1}{2}\varepsilon E^2Sh$$

C'est l'énergie que nous obtiendrions si nous avions utilisé directement l'équation 8.9. Cette expression montre que l'énergie U_c emmagasinée par un condensateur dans un milieu diélectrique est supérieure à celle du même condensateur « vide » chargé sous la

même différence de potentiel. La différence d'énergies égale à $\frac{1}{2}(\varepsilon_r - \varepsilon_0)E^2Sh$ correspond à l'énergie qui est emmagasinée dans le diélectrique (cette énergie emmagasinée sera restituée, via les charges libres, lors de la décharge du condensateur).

8.4. Forces et moments de forces

Sachant évaluer les énergies mises en jeu dans un système de conducteurs à l'équilibre, nous allons maintenant calculer les forces et les moments de force existant entre conducteurs. De façon générale, ces forces et moments de force peuvent être calculés en utilisant le principe des travaux virtuels. Selon ce principe, ces forces $\vec{F}$ et ces moments $\vec{\Gamma}$ sont calculés en déterminant la variation d'énergie $\mathrm{d}W$ du système de conducteurs associée à la translation infinitésimale $\mathrm{d}\vec{l}$ ou à la rotation infinitésimale d'axe Oz et d'angle $\mathrm{d}\theta$. Ces vecteurs sont donnés par les expressions suivantes :

$$\vec{F} = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}l}$$

$$\vec{\Gamma} = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}\theta}\vec{u}_z$$

Pour calculer ces forces et moments, il importe donc au préalable d'identifier précisément le système sur lequel on applique ce principe et de déterminer son énergie caractéristique. Examinons quelques cas concrets.

1 Force sur les armatures d'un condensateur

Calcul des forces

Étudions tout d'abord le cas le plus simple : celui du condensateur plan dans le vide, décrit au paragraphe 8.3.2, soumis à une différence de potentiel V. Son énergie est alors égale à :

$$U_c(h) = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}\frac{hQ^2}{\varepsilon_0 S}$$

Pour calculer la force appliquée sur l'une des armatures, il convient de déplacer celle-ci d'une quantité infinitésimale dh, comptée par exemple positive si on écarte les armatures. Deux procédures sont possibles. Soit on déconnecte au préalable le condensateur, qui est alors un système isolé et le déplacement relatif des armatures se fait « à charges constantes » ; soit on maintient constant le potentiel V entre les armatures, il convient alors de considérer non plus la variation d'énergie du condensateur seul mais celle du système isolé constitué par le condensateur et le générateur de tension. Examinons successivement les deux procédures proposées.

Lorsque le condensateur est isolé, si nous déplaçons l'une des armatures d'une quantité dh, il s'ensuivra une variation de l'énergie du système condensateur U_Q, l'indice Q

indiquant que nous déplaçons l'armature à charges fixes. Par définition, nous aurons :

$$\mathrm{d}\,U_{\mathrm{Q}} = \mathrm{d}\,U_{\mathrm{c}} = U_{\mathrm{c}}(h+dh) - U_{\mathrm{c}}(h) = \frac{1}{2}\frac{Q^2 dh}{\varepsilon_0 S}$$

La force F appliquée sur l'armature déplacée est par définition :

$$F = -\frac{\mathrm{d}\,U_{\mathrm{Q}}}{\mathrm{d}\,h} = -\frac{\mathrm{d}\,U_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}\,h} \tag{8.15}$$

$$F = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} = -\frac{1}{2}V^2\varepsilon_0\frac{S}{h^2}$$

Cette force est négative, elle s'oppose au déplacement de l'armature. Nous pouvons en conclure que les armatures d'un condensateur s'attirent (on pouvait s'y attendre puisqu'elles ont des charges de signes opposés). Il faut donc fournir de l'énergie pour séparer les armatures d'un condensateur.

Examinons maintenant la seconde procédure qui maintient le potentiel V constant. Dans ce cas, nous devrons évaluer la variation d'énergie du système constitué par le condensateur et le générateur qui l'alimente. La variation de cette énergie, notée $\mathrm{d}\,U_{\mathrm{V}}$, est constituée par la variation d'énergie du condensateur $\mathrm{d}\,U_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}V^2\,\mathrm{d}\,C$ à laquelle il faut ajouter l'apport d'énergie du générateur qui doit fournir la charge $\mathrm{d}\,Q = V\,\mathrm{d}\,C$ sous le potentiel V, ce qui représente une énergie $\mathrm{d}\,U_{\mathrm{G}} = -V^2\,\mathrm{d}\,C$. La variation totale d'énergie $\mathrm{d}\,U_{\mathrm{V}}$ vaut donc :

$$\mathrm{d}\,U_{\mathrm{V}} = \mathrm{d}\,U_{\mathrm{c}} + \mathrm{d}\,U_{\mathrm{G}} = \frac{1}{2}V^2\,\mathrm{d}\,C - V^2\,\mathrm{d}\,C = -\frac{1}{2}V^2\,\mathrm{d}\,C = -\,\mathrm{d}\,U_{\mathrm{c}}$$

Nous obtenons l'expression de la force F :

$$F = -\frac{\mathrm{d}\,U_{\mathrm{V}}}{\mathrm{d}\,h} = \frac{\mathrm{d}\,U_{\mathrm{c}}}{\mathrm{d}\,h} \tag{8.16}$$

$$F = \frac{1}{2}V^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\,h}\left(\frac{\varepsilon_0 S}{h}\right) = -\frac{1}{2}V^2\frac{\varepsilon_0 S}{h^2} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon_0 S} \tag{8.17}$$

Nous retrouvons bien entendu une expression identique à celle obtenue dans l'autre procédure. Ceci est fondamentalement normal, la force entre les armatures d'un condensateur ne peut pas dépendre de la façon dont on la calcule.

Si on insère, entre les armatures du condensateur, une lame diélectrique linéaire homogène et d'épaisseur h, la force est multipliée par un facteur ε_{r} et a pour expression :

$$F = -\frac{1}{2}V^2\varepsilon\frac{S}{h^2} = -\frac{1}{2}\frac{Q^2}{\varepsilon S} \tag{8.18}$$

Ceci peut se comprendre en considérant que la lame polarisée présente, en regard d'une armature chargée, des charges de polarisation de signe opposé, augmentant ainsi la force effective d'attraction entre les armatures.

Pression électrostatique

Profitons du calcul de cette force, pour introduire une notion très commode dans le cas général d'un conducteur non plan : la pression électrostatique. L'expression 8.15 de la force s'exerçant entre les armatures d'un condensateur montre que cette force est

proportionnelle à la surface des armatures et peut s'écrire, si nous introduisons le champ électrique $E = V/h$, sous la forme :

$$F = -\frac{1}{2}V^2\varepsilon_0\frac{S}{h^2} = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S$$

Nous pouvons alors introduire la force par unité de surface, appelée « pression électrostatique p », qui a pour expression :

$$p = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} \tag{8.19}$$

Notons que ce résultat suggère que la densité de charge σ contenue par une unité de surface de conducteur est soumise à un champ $E = \sigma/2\varepsilon_0$, ce qui peut paraître surprenant puisque nous avons montré au chapitre 6 que le champ électrique juste à l'extérieur d'un conducteur est égal à σ/ε_0. Il n'en est rien. En effet, la charge σ est sur le conducteur et non juste à l'extérieur du conducteur aussi le champ électrique qu'elle subit est bien égal à $\sigma/2\varepsilon_0$. Pour s'en convaincre il suffit de considérer que dans un conducteur, les charges sont réparties uniquement en surface avec une densité σ, et le champ électrique est nul dans l'intérieur. Cette dernière propriété résulte de la distribution des charges sur l'ensemble du conducteur, et ne peut en aucun cas découler uniquement de la distribution locale, laquelle donnerait un champ $-\sigma/2\varepsilon_0$ à l'intérieur du conducteur et $+\sigma/2\varepsilon_0$ à l'extérieur. Il faut donc supposer que les charges lointaines créent sur la surface un champ $\sigma/2\varepsilon_0$, opposé au précédent à l'intérieur du conducteur et de même sens à l'extérieur. Il est traditionnel de dire que c'est cette composante des charges lointaines, et elle seule, qui est responsable de la force qui agit sur les charges locales, donc sur la surface du conducteur à laquelle elles sont liées. Il existe une autre manière de calculer le champ électrique sur le conducteur en se souvenant que dans la réalité, le champ ne passe pas brutalement de 0 à σ/ε_0, mais que cette variation s'effectue sur une distance D, de l'ordre de l'angström dans les métaux et donc que le champ à la surface, ou ce qui est considéré comme tel, doit être un champ moyen égal donc à $\sigma/2\varepsilon_0$.

2 Moments de forces sur les armatures d'un condensateur

Les moments de force sur les armatures d'un condensateur se calculent de la même manière. Pour illustrer cette procédure, considérons le condensateur constitué par deux armatures parallèles en forme de secteur de rayon R, l'une des armatures pouvant tourner autour de leur axe commun zz'. L'angle variable entre les surfaces en regard est noté θ (fig. 8.1).

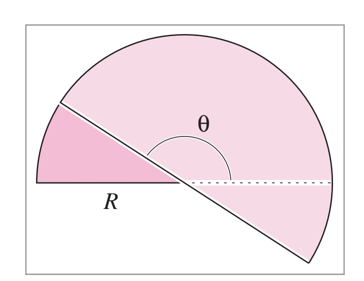


Fig. 8.1. Condensateur à cadre mobile.

Dans un tel système, la capacité C a pour valeur :

$$C = \varepsilon_0\frac{S}{h} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 R^2\frac{\theta}{h}$$

Soumis à une différence de potentiel V, ce condensateur emmagasine l'énergie U_c qui est égale à :

$$U_c = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{4}\varepsilon_0 R^2 V^2 \frac{\theta}{h}$$

Commençons par calculer le moment Γ des forces appliquées sur les armatures en supposant que nous fassions un déplacement angulaire infinitésimal $d\theta$ (compté positivement si nous augmentons la taille de la surface du condensateur) tout en maintenant le potentiel constant. Conformément à la définition, le couple associé est :

$$\Gamma = -\frac{dU_V}{d\theta} = \frac{dU_c}{d\theta}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\Gamma = \frac{1}{4}\varepsilon_0 R^2 \frac{V^2}{h}$$

Ce couple positif tend à faire tourner le dispositif pour augmenter la surface du condensateur.

3 Force exercée sur un matériau non conducteur

Force électrique sur un dipôle électrique

Supposons que nous placions un dipôle électrique permanent $\vec{p} = q\vec{a}$ dans un champ électrique $\vec{E}$; calculons la force à laquelle il est soumis. Si le champ $\vec{E}$ est uniforme, la force résultante est nulle puisque le champ exerce des forces égales et opposées sur chacune des charges constituant le dipôle. En revanche, si le champ $\vec{E}$ varie de point en point, ces deux forces ne sont plus égales et opposées. La force résultante s'écrit alors :

$$\vec{F}(\vec{r}) = q\vec{E}\left(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}\right) - q\vec{E}\left(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}\right)$$

En coordonnées cartésiennes, la composante i de cette force s'écrit :

$$F_i = qE_i\left(\vec{r} + \frac{\vec{a}}{2}\right) - qE_i\left(\vec{r} - \frac{\vec{a}}{2}\right)$$

En développant cette expression au premier ordre, nous obtenons :

$$F_i = q\vec{a} \cdot \vec{\nabla}E_i = \vec{p} \cdot \vec{\nabla}E_i$$

Ainsi la force s'exerçant sur un dipôle peut-elle s'écrire :

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}E_x)\vec{u}_x + (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}E_y)\vec{u}_y + (\vec{p} \cdot \vec{\nabla}E_z)\vec{u}_z \tag{8.20}$$

Puisque le moment électrique $\vec{p}$ est un vecteur défini, l'opérateur $\vec{\nabla}$ n'agit pas sur ses composantes, aussi pouvons-nous réécrire la force sous la forme :

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{p} \cdot \vec{E}) \tag{8.21}$$

Ainsi par construction, l'énergie potentielle associée à un dipôle dans un champ électrique $\vec{E}$ est égale à $-\vec{p} \cdot \vec{E}$.

Force électrique sur un matériau non conducteur

Considérons maintenant non plus un dipôle mais un matériau contenant des charges électriques liées. Ce matériau est caractérisé par une polarisation $\vec{P}$ définie comme le moment dipolaire du matériau par unité de volume. En généralisant l'expression 8.20 de la force exercée sur un dipôle, nous obtenons la force par unité de volume exercée sur le diélectrique :

$$\vec{F} = (\vec{P} \cdot \vec{\nabla} E_x)\vec{u}_x + (\vec{P} \cdot \vec{\nabla} E_y)\vec{u}_y + (\vec{P} \cdot \vec{\nabla} E_z)\vec{u}_z \tag{8.22}$$

Cette expression peut prendre d'autres formes selon que le matériau présente une polarisation permanente ou induite.

Dans le cas des ferroélectriques homogènes, la polarisation $\vec{P}$ est un vecteur constant, la force exercée par le champ électrique par unité de volume s'écrit :

$$\vec{F} = \vec{\nabla}(\vec{P} \cdot \vec{E}) \tag{8.23}$$

L'énergie par unité de volume U_e associée à cette force est de la forme :

$$U_e = -\vec{P} \cdot \vec{E} \tag{8.24}$$

En revanche, dans le cas d'un diélectrique linéaire homogène, la polarisation est proportionnelle au champ électrique appliqué, $\vec{P} = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\vec{E}$, la force par unité de volume prend alors la forme :

$$\vec{F}_x = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\left((\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}_x)\vec{u}_x + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}_y)\vec{u}_y + (\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \vec{E}_z)\vec{u}_z\right)$$

En profitant des propriétés locales du champ électrique, nous pouvons continuer à transformer cette expression. En effet, la composante suivant l'axe Ox de cette force s'écrit :

$$F_x = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_x}{\partial y} + E_z \frac{\partial E_x}{\partial z}\right)$$

Le rotationnel du champ électrostatique étant nul, les composantes du champ vérifient les relations :

$$\frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial x}$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}$$

En introduisant ces relations dans l'expression de la composante F_x de la force, nous obtenons :

$$\begin{aligned} F_x &= \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\left(E_x \frac{\partial E_x}{\partial x} + E_y \frac{\partial E_y}{\partial x} + E_z \frac{\partial E_z}{\partial x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)\frac{\partial}{\partial x}(E^2) \end{aligned}$$

En généralisant ce résultat à l'ensemble des composantes de la force, l'expression de la force par unité de volume exercée par le champ électrique sur le matériau diélectrique est de la forme :

$$\vec{F} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{2}\vec{\nabla}(E^2) \tag{8.25}$$

L'énergie par unité de volume associée à cette force s'écrit :

$$U_e = -\frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)}{2}E^2$$

L'énergie totale associée à un ensemble de dipôles électriques a pour expression :

$$U = -\iiint_V \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E^2 \, d\tau}{2} = -\frac{1}{2}\iiint_V \vec{P} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

Un peu d'histoire

Expérience de Rutherford

Lorsque l'on envoie un faisceau de particules α (noyau d'Hélium) de quelques MeV sur une fine feuille d'or, on observe la déviation des particules, cette déviation pouvant attendre 180 ° pour certaines de ces particules diffusées par les noyaux d'or. Le physicien anglais Rutherford exploita ce phénomène pour donner une évaluation des dimensions du noyau atomique.
En effet, chaque noyau atomique créant un potentiel électrostatique, une particule α sera deviée lorsque son énergie cinétique sera de l'ordre de grandeur de l'énergie potentielle coulombienne créée par le noyau. En analysant les diffusions des particules α en fonction de leur énergie cinétique, en peut déterminer une distance R caractérisant les dimensions de la zone d'influence de chaque noyau. En effet, en augmentant l'énergie cinétique des particules α, on réduit R jusqu'à atteindre une estimation raisonnable de la taille du noyau. C'est ainsi que pour des particules de $E_c = 10$ Mev, si nous considérons un noyau d'or ($Z = 79$) de charge positive $Q = Z$ nous obtenons :

$$E_c \approx 2eV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{L}$$

$$L \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{E_c}$$

soit une distance L de l'ordre de $3 \cdot 10^{-14}$ m. Le rayon du noyau est donc inférieur à cette distance.

Exercices

1 Lors d'une collision frontale, quelle est la distance d'approche d'un proton envoyé avec une énergie cinétique égale à 2 MeV sur un atome d'or initialement immobile ($Z = 79$) ?

2 Trouver l'énergie potentielle électrostatique d'une sphère conductrice de rayon R portant une charge Q.

3 Trouver l'énergie potentielle électrostatique d'une sphère de rayon R uniformément chargée en volume avec une charge totale Q. En déduire l'ordre de grandeur en MeV de l'énergie électrostatique piégée dans un noyau d'uranium 238 ($Z = 92$, $R = 9 \cdot 10^{-15}$ m).

4 Déterminer les capacités des condensateurs plan, cylindrique et sphérique. Calculer dans les trois cas l'énergie totale du champ électrique

$$\iiint_V \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} \, d\tau$$

et montrer qu'elle est égale à $\frac{C(V_A - V_B)^2}{2}$ où $(V_A - V_B)$ est la différence de potentiel entre les plaques.

5 Donner l'expression de l'énergie d'un système de trois charges q_1, q_2 et q_3 situées aux sommets d'un triangle équilatéral de côté a.

6 Utiliser l'expression de l'énergie W en fonction de E pour calculer l'énergie emmagasinée dans les condensateurs constitués par les deux conducteurs sphériques puis les trois conducteurs sphériques des exercices 6.8 et 7.8.

7 **a.** Un volume sphérique, de centre O et de rayon R, est uniformément chargé avec la charge volumique ρ.

• Déterminer le champ électrostatique $\vec{E}(r)$ créé par cette distribution de charges en un point M situé à la distance $r \geqslant R$ du point O. En déduire l'expression du potentiel $V(r)$. Préciser $V(R)$.

• Calculer la charge $\mathrm{d}Q$ d'une couche de rayon R, d'épaisseur $\mathrm{d}R$ et de charge volumique ρ. En déduire le travail $\mathrm{d}W$ qu'il faut accomplir pour augmenter de $\mathrm{d}R$ le rayon du volume chargé en amenant la charge $\mathrm{d}Q$ de l'infini sur la sphère. Montrer que $W(R) = 4\pi\rho^2 R^5/15\varepsilon_0$. Exprimer $W(R)$ en fonction de R et de la charge totale Q.

b. Deux noyaux atomiques ont, l'un Z protons et N neutrons, l'autre $Z+1$ protons et $N-1$ neutrons. On admettra qu'ils ont même rayon R et que leurs charges sont uniformément réparties.

Exprimer en fonction des données et de la charge e du proton, la différence d'énergie ΔW entre ces noyaux et calculer le rayon R commun des deux noyaux de bore $^{11}_{6}B$ ($Z = 5$,N =6) et de carbone $^{11}_{5}C$ ($Z = 6$, $N = 5$), si on admet que la différence d'énergie de 2,79 MeV, mesurée expérimentalement, est uniquement d'origine électrostatique.
Indice. *On rappelle que* 1 *MeV* $= 1{,}6 \cdot 10^{-13}$ *J.*

8 Calculer la force nécessaire pour déplacer l'armature intérieure d'un condensateur cylindrique de hauteur H si l'armature extérieur est fixe :

a. à charge constante ;

b. à potentiel constant.
En déduire dans les deux cas, la variation de l'énergie du condensateur en fonction de la différence de hauteur x entre les deux électrodes par rapport à la position d'équilibre.

9 Quelle est l'énergie nécessaire pour séparer la charge ponctuelle q située en O et la charge diffuse de densité volumique $\rho(r)$ de l'exercice 4.4 ? Quelle est l'énergie d'ionisation de l'atome ainsi modélisé ?

Chapitre 9

Le champ magnétostatique

Dans ce chapitre, nous commencerons par décrire les expériences effectuées par Ampère et par présenter les raisonnements qui le conduisirent à postuler l'existence d'une grandeur vectorielle que Faraday conceptualisera quelques années plus tard sous le nom de champ magnétique. Nous donnerons successivement les expressions macroscopiques de ce champ puis ses propriétés locales. Nous terminerons ce chapitre sur quelques exemples simples mettant en œuvre ces différentes notions.

9.1 Force magnétique entre fils rectilignes infinis

9.2 Notion de champ magnétique

1 Champ magnétique créé par un fil rectiligne

2 Champ magnétique créé par un circuit quelconque – Loi de Biot et Savart

9.3 Propriétés locales du champ magnétique

1 Divergence du champ magnétostatique

2 Rotationnel du champ magnétostatique - Théorème d'Ampère

3 Loi de continuité du champ magnétique

9.4 Exemples de calcul du champ magnétique créé par différentes distributions de courants

1 Champ créé par un fil infini parcouru par un courant I

2 Champ créé par une spire circulaire de rayon R, parcourue par un courant I

3 Champ créé par un solénoïde infini de n spires de rayon R par unité de longueur, parcouru par un courant I

Mots-clés

• Champs magnétostatique • Biot et Savart • Théorème d'Ampère

L'orientation systématique de l'aiguille d'une boussole vers le Nord est la manifestation la plus universellement connue des propriétés magnétiques de la matière. Étudiées empiriquement et qualitativement pendant des siècles, les propriétés de la « matière magnétique » et les effets associés n'ont connu aucune explication satisfaisante jusqu'au XIXe siècle. Il fallut attendre les travaux d'Ampère pour qu'apparaisse une première analyse convaincante de ces phénomènes. Paradoxalement, ces résultats n'ont pas trouvé leur origine dans l'étude de la matière magnétique elle-même mais dans des expériences liées aux courants électriques dans des conducteurs. En 1820, le physicien Hans Christian Oerstedt découvrait qu'une aiguille aimantée située à proximité d'un fil parcouru par un courant électrique pivotait de façon à se mettre perpendiculaire au fil : un courant électrique provoquait les mêmes effets qu'un aimant ! Pour la première fois, on mettait en évidence le lien existant entre courant électrique et magnétisme. Quelques mois plus tard, le physicien André Marie Ampère reprenait cette étude et, en se fondant sur une série d'expériences de mesure de forces entre circuits parcourus par des courants, posait les bases d'une théorie du magnétisme que nous allons décrire maintenant.

9.1. Force magnétique entre fils rectilignes infinis

Expérience d'Ampère

Considérons deux fils conducteurs rectilignes infinis (par « fils infinis » nous entendons des fils longs devant la distance les séparant) parcourus respectivement par les courants électriques constants I_a et I_b (fig. 9.1) et étudions leur interaction en fonction de l'orientation relative des fils, de leur distance et de l'intensité des courants qui y circulent (nous reprenons ici l'une des expériences réalisées par Ampère, toutefois nous la discuterons en prenant certaines libertés avec la méthode et les raisonnements d'Ampère).

Si les deux fils sont parallèles, il existe en chaque point des fils une force qui leur est perpendiculaire, cette force disparaissant lorsque les fils sont perpendiculaires.

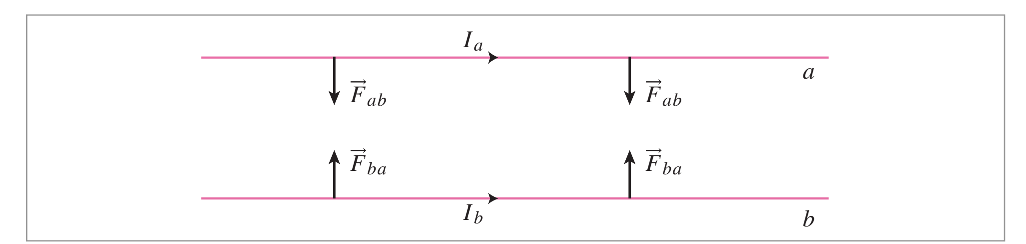


Fig. 9.1. Forces magnétiques **entre fils rectilignes parcourus par des courants constants.**

En faisant varier le sens du courant dans chacun de ces fils, on peut constater que cette force est attractive si les fils sont parcourus par des courants de même sens, et répulsive dans le cas contraire. Son intensité est la même en tout point des fils. Lorsqu'on déplace l'un des fils parallèlement à l'autre ou autour de lui, la distance entre les deux fils restant constante, cette intensité n'est pas modifiée. De plus, en faisant varier les valeurs des

courants I_a et I_b et leur distance r, on constate que le module de la force est simplement proportionnel à :

$$\frac{I_a I_b}{r}$$

Telle était, en substance, la teneur de l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus par Ampère pour des fils infinis parallèles.

Un peu d´histoire

Actions transversales

La découverte d'Oerstedt et l'analyse faite par Ampère apportait une idée nouvelle : une force pouvait être transversale. Ce résultat était d'une nature radicalement nouvelle pour les physiciens de l'époque tant le modèle newtonien de force radiale semblait universel. Ampère lui-même cherchait à « ramener ces mouvements, par le calcul, à des forces agissant toujours entre deux particules matérielles suivant la droite qui les joint de manière que l'action exercée par l'une d'elle sur l'autre soit égale et opposée à celle que cette dernière exerce en même temps sur la première ».

Loi de Laplace

Cette force entre fils infinis, et plus généralement toute force magnétique, peut être décrite en introduisant le champ magnétique $\vec{B}$, grandeur vectorielle qui caractérise la « modification » de l'espace créée par la présence des courants à l'image du champ électrique qui caractérise la présence de charges électriques. Cette notion de « champ » magnétique, comme celle de « champ » électrique n'était pas connue par Ampère et fut conceptualisée plusieurs années plus tard par Faraday qui lui attribua le statut de « modification » de l'espace due au courant circulant dans le fil.

Dans ce formalisme, chaque fil parcouru par un courant crée un champ magnétique, défini en chaque point de l'espace, et la force subie par le second fil résulte de l'action de ce champ sur le courant qu'il transporte.

L'introduction de ce champ magnétique permet de donner une expression simple de la force magnétique. Considérons l'élément de longueur $\mathrm{d}\,\vec{l}$ centré en $\vec{r}$ d'un fil parcouru par un courant I et soumis à un champ magnétique $\vec{B}(\vec{r})$ (fig. 9.2). La force $\mathrm{d}\,\vec{F}$ subie par cet élément a pour expression :

$$\mathrm{d}\,\vec{F}(\vec{r}) = I\,\mathrm{d}\,\vec{l} \wedge \vec{B}(\vec{r}) \qquad (9.1)$$

Cette expression de la force magnétique est connue sous le nom de force de Laplace.

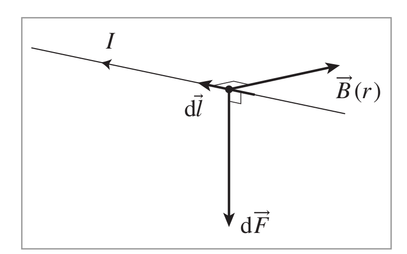


Fig. 9.2. Orientation relative du courant électrique, du champ magnétique et de la force de Laplace.

Approfondissement

Force de Laplace et force de Lorentz

Comment pouvons-nous décrire les forces magnétiques, liées aux courants, directement à partir du déplacement de charges électroniques ? Lorentz a montré qu'une particule de charge q, animée d'une vitesse, $\vec{v}$ soumise simultanément à un champ électrique $\vec{E}$ et à un champ magnétique $\vec{B}$, est soumise à une force $\vec{f}$ qui a pour expression :

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}).$$

Cette expression nous permet de retrouver la force de Laplace. Considérons par exemple, un fil parcouru par un courant I placé dans un champ magnétique $\vec{B}$. Ce courant I étant associé au déplacement des électrons de conduction le long du fil à la vitesse $\vec{v}$, chaque charge électronique e subit la force de Lorentz $e\vec{v} \wedge \vec{B}$. S'il y a n charges par unité de volume, le nombre de charges élémentaires contenues dans un volume infinitésimal $\mathrm{d}\tau$ est égal à $n\,\mathrm{d}\tau$ et la force $\mathrm{d}\vec{F}$ agissant sur cet élément de volume est donc $\mathrm{d}\vec{F} = ne\,\mathrm{d}\tau\vec{v} \wedge \vec{B}$.

La densité de courant étant par définition égale à $\vec{J} = ne\vec{v}$, la force $\mathrm{d}\vec{F}$ agissant sur l'élément de volume $\mathrm{d}\tau$ est égale à $\mathrm{d}\vec{F} = \mathrm{d}\tau\vec{J} \wedge \vec{B}$.

Si le fil est de section uniforme S, le volume $\mathrm{d}\tau$ correspond à une longueur $\mathrm{d}l$ de fil, $\mathrm{d}\tau = S\,\mathrm{d}l$ nous pouvons alors réécrire la force $\mathrm{d}\vec{F}$: $\mathrm{d}\vec{F} = I\,\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B}$.

9.2. Notion de champ magnétique

Ayant supposé l'existence d'un champ magnétique qui permet de rendre compte des caractéristiques expérimentales des forces magnétiques sous la forme 9.1, il convient maintenant de le définir plus précisément, en particulier d'établir son orientation, son sens et son module en fonction des caractéristiques du courant qui le crée.

1 Champ magnétique créé par un fil rectiligne

Commençons par déterminer les caractéristiques vectorielles (orientation et sens) du champ magnétique $\vec{B}$ créé par un fil rectiligne infini, parcouru par un courant constant uniforme.

Pour ce faire, nous allons nous appuyer sur les résultats expérimentaux d'Ampère présentés au paragraphe 9.1 et envisager successivement chacune des orientations possibles du champ magnétique $\vec{B}$ créé par le fil infini A parcouru par le courant I_a, la symétrie de la distribution de courant permettant de n'en retenir qu'une seule.

Plaçons-nous dans un système de coordonnées cylindriques, l'axe du fil étant confondu avec l'axe z et supposons tout d'abord que le champ magnétique créé par le courant I_a soit dans la direction radiale $\vec{u}_r$. Si l'on change le sens du courant dans le fil, cela revient à retourner le fil de haut en bas, aussi un champ magnétique radial ne devrait-il pas être modifié par inversion du courant (fig. 9.3.a). Il devrait donc en être de même de la force exercée par ce champ sur le fil B parcouru par le courant I_b, or ceci est contraire aux résultats expérimentaux qui montrent que le sens de la force exercée sur B change lorsque le courant change de sens dans A. Le champ magnétique ne peut donc pas être radial.

Examinons maintenant l'hypothèse d'un champ magnétique longitudinal, parallèle à $\vec{u}_z$. Supposons comme précédemment que nous inversions le courant dans le fil A, cette opération étant équivalente au retournement du fil, elle entraînerait naturellement le retournement du champ magnétique puisque le champ magnétique est supposé longitudinal, et donc de la force (fig. 9.3.b). L'argument retenu pour éliminer la composante radiale ne tient plus ici, l'orientation longitudinale de $\vec{B}$ n'est pas incompatible avec l'expérience concernant le lien entre le sens de la force et le sens relatif des courants. Toutefois, un autre argument va nous servir à éliminer cette hypothèse et montrer que cette composante longitudinale est nulle. En effet, si nous supposons que le champ magnétique est longitudinal, il est donc parallèle (ou antiparallèle) au fil B (rappelons que le fil B est parallèle au fil A). Aussi, pour le système constitué par le fil B et le champ magnétique, toutes les directions radiales autour du fil B sont équivalentes. Aucune raison n'imposerait donc à la force d'être dans la direction du fil A. Cet argument élimine la possibilité d'avoir le champ magnétique dans la direction longitudinale $\vec{u}_z$.

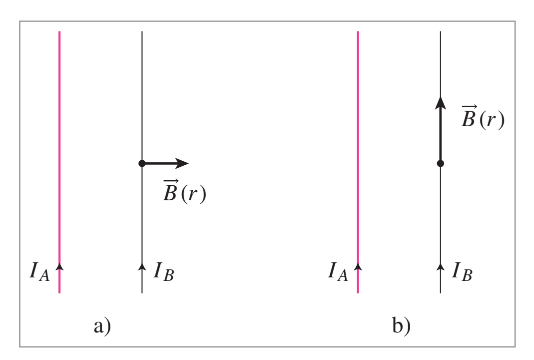


Fig. 9.3. Hypothèses sur le champ magnétique créé par un fil A sur un fil B : **a. champ radial ; b. champ longitudinal.**

Il ne reste donc plus qu'une seule possibilité au champ magnétique : il doit être dans la direction orthoradiale. Cette direction du champ magnétique permet de rendre compte du changement de sens de la force lors d'une inversion du sens du courant et définit une direction privilégiée correspondant à la perpendiculaire joignant les deux fils. En effet, d'une part, changer le sens du courant revient à inverser le sens de $\vec{B}$ supposé orthoradial, d'autre part la direction orthoradiale et l'axe du fil B définissent ensemble une troisième direction, perpendiculaire aux deux premières (fig. 9.4.a). Nous pouvons donc conclure qu'un fil rectiligne infini parcouru par un courant I engendre en un point M de l'espace un champ magnétique orthoradial. Son sens est donné de façon arbitraire en postulant qu'un observateur, parcouru par le courant lui rentrant par les pieds et lui sortant par la tête et regardant le point M, verrait le champ magnétique allant de la droite vers la gauche (cette règle est connue sous le nom de « règle du bonhomme d'Ampère »).

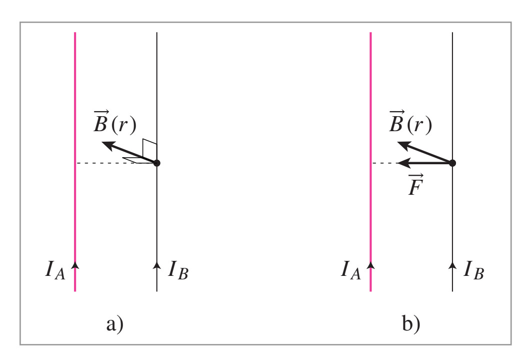


Fig. 9.4. Champ magnétique (a) et force (b) **créés par un fil conducteur A parcouru par un courant sur un fil conducteur B, également parcouru par un courant.**

Par ailleurs, les mesures quantitatives de forces magnétiques montrent que son intensité varie comme l'inverse de la distance r au fil :

$$B_\theta \propto \frac{I}{r}$$

Munis de cette définition du champ magnétique et de la relation 9.1 donnant la force de Laplace, nous pouvons calculer la force entre les deux fils infinis de l'expérience d'Ampère. Cette force est orientée le long de la perpendiculaire aux deux fils et son intensité par unité de longueur des fils est proportionnelle à $I_a I_b / r$ (fig. 9.4.b), résultat correspondant exactement aux observations expérimentales présentées au paragraphe 9.1.

2 Champ magnétique créé par un circuit quelconque Loi de Biot et Savart

Pour étendre son analyse à des circuits de formes différentes, Ampère pensa initialement que tout circuit parcouru par un courant était décomposable en éléments infinitésimaux orientés dans le sens du courant, la force magnétique entre deux circuits étant alors égale à la somme vectorielle des forces magnétiques existant entre chacun de ses éléments. Cette idée de superposition, en parfait accord avec les idées issues de la théorie de Newton, était tentante, d'autant plus qu'une expérience menée par Ampère avait montré que la force entre un fil sinueux et un fil rectiligne proche était identique à celle entre deux fils rectilignes. Ampère poussa cette analyse aussi loin qu'il le put et donna de la force une expression compliquée faisant intervenir tous les paramètres géométriques définissant les positions respectives de chaque élément des circuits A et B. Il convient cependant de noter que l'idée d'isoler un élément de courant n'a aucun sens physique car le courant qui parcourt un élément de fil doit y être introduit et en sortir, et on ne peut plus du coup négliger l'effet des fils apportant et évacuant les charges de l'élément considéré, mais on peut toutefois accepter ce « découpage » comme un pur artifice mathématique. C'est ainsi qu'a été établie la loi de Biot et Savart donnant l'expression mathématique du champ magnétique créé par un circuit. Cette loi n'a pas du tout la même valeur fondatrice que la loi de Coulomb, il faut simplement la considérer comme une loi empirique justifiée par l'expérience.

Loi de Biot et Savart

Considérons le circuit quelconque C présenté sur la figure 9.5 et calculons le champ magnétique créé par le courant I en un point M, repéré par le vecteur $\vec{r}_{\mathrm{M}}$.

Chaque élément $\mathrm{d}\vec{l}$ du circuit, situé au point $\mathrm{P}(\vec{r}_{\mathrm{P}})$ et orienté dans le sens du courant, crée au point M une contribution vectorielle $\mathrm{d}\vec{B}$ au champ magnétique total. Cet élément infinitésimal de circuit peut être considéré comme rectiligne. La loi de Biot et Savart, analogue magnétique de la loi de Coulomb en électrostatique, s'exprime par le fait que le module de $\mathrm{d}B(\vec{r}_{\mathrm{M}})$ est proportionnel à $I/|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2$; son orientation, conformément aux conclusions présentées au paragraphe précédent, est telle que le trièdre $(\mathrm{d}\vec{l}, \vec{u}_{\mathrm{PM}}, \mathrm{d}\vec{B})$ soit direct, $\vec{u}_{\mathrm{PM}}$ étant le vecteur unitaire dans la direction PM. L'ensemble de ces caractéristiques est contenu dans l'expression vectorielle :

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2} \mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{u}_{\mathrm{PM}} \qquad (9.2)$$

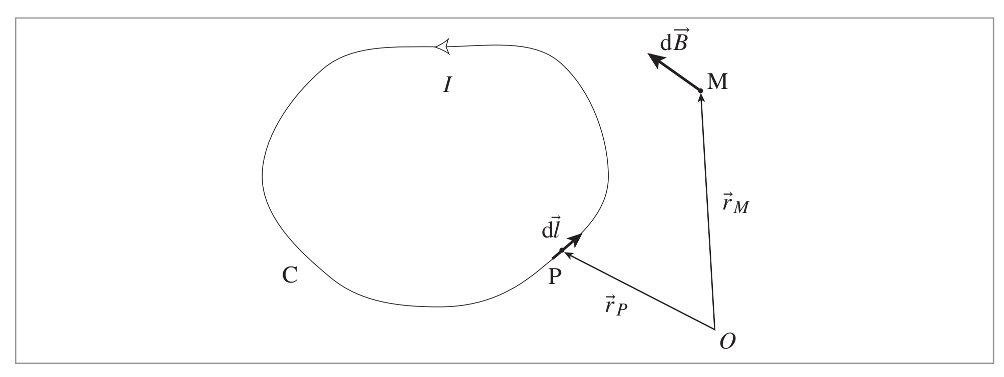


Fig. 9.5. Contribution d'un élément infinitésimal de circuit parcouru par un courant constant au champ magnétique.

Dans cette expression, le facteur $\mu_0/4\pi$ est un facteur dimensionnel qui vaut 10^{-7} dans le système MKSA, le champ magnétique étant alors exprimé en Tesla. Le facteur $\mu_0/4\pi$ est une constante introduite pour que les unités des grandeurs magnétiques s'ajustent à celles employées dans l'expression de la loi de Laplace. Ainsi, si le courant est exprimé en ampères, le champ magnétique exprimé en tesla, un fil de 1 m parcouru par un courant de 1 A dans un champ de 1 T ressent une force de 1 N. Le Tesla est une unité relativement grande et on utilise couramment le Gauss qui vaut 10^{-4} T. Pour obtenir l'expression du champ magnétique total $\vec{B}(\vec{r}_\mathrm{M})$, il convient maintenant d'effectuer la somme vectorielle de toutes ces contributions infinitésimales. Chaque composante B_i de $\vec{B}$ s'écrit alors sous la forme d'une intégrale prise le long du contour défini par le circuit C. Lorsqu'il existe plusieurs circuits indépendants, cette somme vectorielle doit être effectuée sur l'ensemble des circuits. Nous obtenons ainsi une expression des composantes B_i du champ connue sous le nom de loi de Biot et Savart :

$$B_\mathrm{i}(\vec{r}_\mathrm{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_\mathrm{C} \frac{(\mathrm{d}\,\vec{l} \wedge \vec{u}_\mathrm{PM})_\mathrm{i}}{|\vec{r}_\mathrm{P} - \vec{r}_\mathrm{M}|^2} \qquad (9.3)$$

Il est parfois commode d'exprimer cette relation en fonction de la densité de courant $\vec{J}$ dans le fil conducteur. Par définition, le courant I transporté par le circuit est égal à l'intégrale de la densité de courant $\vec{J}$ sur la section transverse S du fil :

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S}$$

En utilisant cette définition, nous pouvons écrire la loi de Biot et Savart sous sa forme généralisée comme une intégrale se faisant sur tout le volume occupé par le conducteur constituant le circuit :

$$B_\mathrm{i}(\vec{r}_\mathrm{M}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_\mathrm{V} \frac{(\vec{J} \wedge \vec{u}_\mathrm{PM})_\mathrm{i}}{|\vec{r}_\mathrm{P} - \vec{r}_\mathrm{M}|^2}\,\mathrm{d}\tau \qquad (9.4)$$

Un peu d'histoire

Biot et Savart

Biot et Savart n'étaient pas « ampériens » mais soutenaient qu'il fallait plutôt tout ramener à la loi de Coulomb et aux fluides magnétiques. La bataille faisait rage entre les deux points de vue. Pour eux, « les effets électrodynamiques ne sont que la conséquence secondaire d'une véritable aimantation imprimée par le courant électrique aux conducteurs métalliques constituant les circuits [...] les courants voltaïques circulant autour des molécules [...] entraînent une complication d'arrangements et de suppositions si grande qu'elle en devient presque inexprimable ». À l'inverse, Ampère considérait que « l'action qui émane de courants voltaïques ne peut être due à une distribution particulière de certains fluides au repos dans les conducteurs ».

Orientation du champ magnétique et symétrie des distributions de courants

Nous avons étudié en détail au chapitre 3, l'influence de la symétrie des distributions de charges sur l'orientation du champ électrique. Dans ce paragraphe, nous analyserons de même l'influence de la symétrie des distributions de courants sur l'orientation du champ magnétique qu'elles créent.

Considérons tout d'abord les éléments de symétrie nous permettant de réduire le nombre de variables pertinentes nécessaires pour décrire les variations des différentes composantes du champ $\vec{B}$. Prenons l'exemple d'un fil infini parallèle à l'axe Oz parcouru par un courant constant. Ce fil étant infini, la distribution de courant est invariante par translation le long de l'axe Oz et les composantes de $\vec{B}$ ne dépendront pas de la variable z. De même, l'invariance du système par rotation autour de l'axe Oz nous permet d'affirmer que, en coordonnées cylindriques, elles ne dépendront pas non plus de l'angle θ. Le champ magnétique créé par un tel fil ne pourra varier qu'avec la distance au fil. Le même type de raisonnement peut être effectué dans le cas d'une spire dont l'axe Oz est l'axe de révolution. Ce système est invariant par rotation autour de Oz, le champ magnétique ne dépendra pas lui non plus de l'angle θ. Sur ces deux exemples, nous retrouvons les mêmes arguments que ceux utilisés pour réduire le nombre de variables nécessaires à la description du champ électrique créé par une distribution de charges électriques. Nous pourrons les étendre à toutes les distributions de courants.

Examinons maintenant les arguments qui permettent d'identifier les composantes du champ magnétique qui sont nulles par symétrie. Comme dans le cas du champ électrique, nous allons commencer par définir des plans de symétrie et d'antisymétrie magnétique. Il est toutefois nécessaire de souligner que les conclusions auxquelles nous arriverons sont radicalement différentes de celles obtenues dans le cas du champ électrique (à la différence du champ électrique qui du point de vue mathématique est un vecteur, le champ magnétique est un pseudo-vecteur). Considérons par exemple deux fils rectilignes infinis et parallèles A et B. Supposons tout d'abord que ces deux fils soient parcourus par des courants identiques orientés dans le même sens (fig. 9.6).

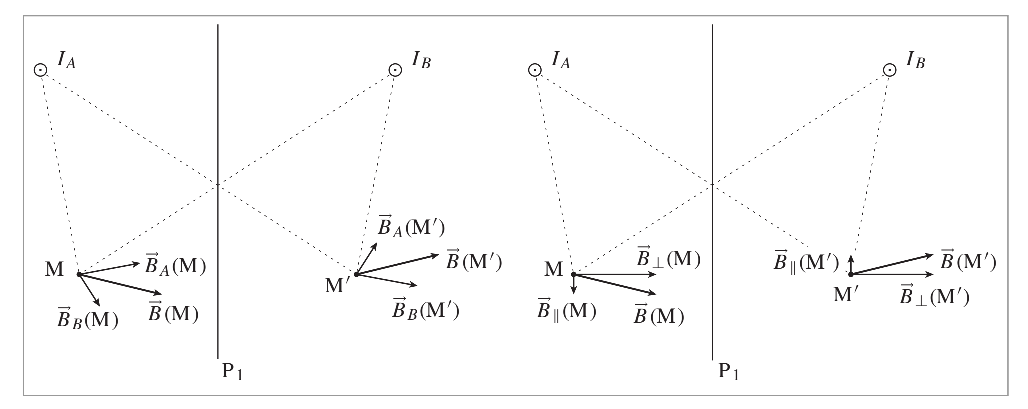


Fig. 9.6. Composantes normales et tangentielles du champ magnétique par rapport à un plan de symétrie.

La figure de gauche donne en M et M′ le champ créé par les fils parcourus par les courants I_a et I_b ; sur la partie droite, on a décomposé le champ en ses composantes parallèle et perpendiculaire au plan de symétrie.

Dans ce cas, le plan médian P_1, parallèle aux deux fils est un plan de symétrie des distributions de courants. En effet, le point P appartenant au fil A est projeté par symétrie par rapport au plan P_1 sur le point P′ se trouvant sur le fil B. Par cette même opération de symétrie, le vecteur densité de courant $\vec{J}(P)$ au point P se transforme en un vecteur qui est égal à $\vec{J}(P')$ puisque par hypothèse les deux courants sont identiques. Que peut-on dire dans ces conditions du champ magnétique que crée un tel système en un point M quelconque ? Nous avons vu au paragraphe 9.1 que le champ magnétique créé par un fil était nécessairement orthoradial ; le champ magnétique créé par les deux fils est donc, en vertu du principe de superposition, nécessairement dans le plan perpendiculaire aux fils passant par le point M. Ce champ peut s'écrire sous la forme :

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_\perp(M) + \vec{B}_\parallel(M)$$

$\vec{B}_\perp(M)$ et $\vec{B}_\parallel(M)$ étant les contributions au champ respectivement perpendiculaire et parallèle au plan P_1. Nous pouvons effectuer la même décomposition pour le champ magnétique au point M′, symétrique de M par rapport à P_1 :

$$\vec{B}(M') = \vec{B}_\perp(M') + \vec{B}_\parallel(M')$$

Comme nous pouvons le constater sur la figure 9.6 (nous ne ferons pas ici la démonstration analytique de cette propriété), nous avons :

$$\begin{aligned} \vec{B}_\perp(M) &= \vec{B}_\perp(M') \\ \vec{B}_\parallel(M) &= -\vec{B}_\parallel(M') \end{aligned} \tag{9.5}$$

Ce résultat se généralise à tout plan de symétrie de la distribution des courants. Si le point M appartient au plan de symétrie P_1, M est confondu avec son symétrique, les relations 9.5 imposent alors :

$$\vec{B}_\parallel(M) = -\vec{B}_\parallel(M' = M) = \vec{0} \tag{9.6}$$

Le champ magnétique en un point appartenant à un plan de symétrie P_s est nécessairement perpendiculaire à ce plan.

Supposons maintenant que les courants dans les fils A et B soient de sens opposés (fig. 9.7).

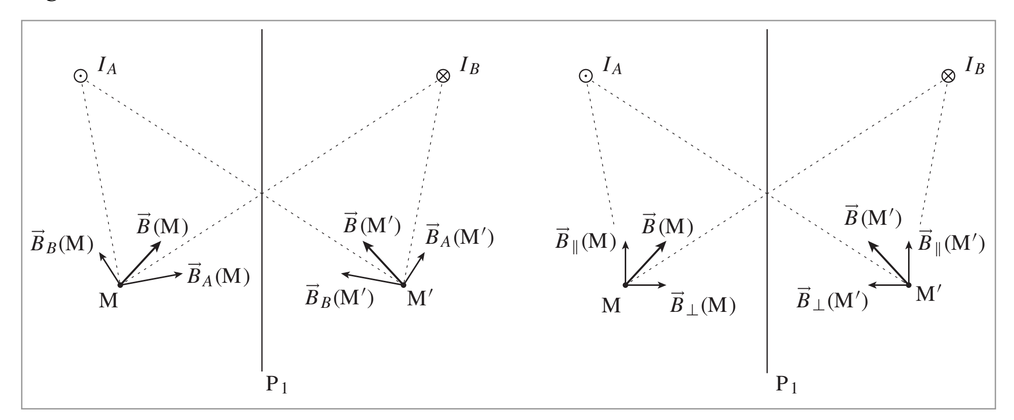


Fig. 9.7. Composantes normales et tangentielles du champ magnétique par rapport à un plan d'antisymétrie.

Dans ce cas, $\vec{J}(P)$ se transforme par symétrie par rapport au plan P_1 en un vecteur qui est opposé maintenant au vecteur $\vec{J}(P')$. Le plan P_1 n'est plus un plan de symétrie magnétique mais un plan d'antisymétrie. Que peut-on dire dans ces conditions des champs en M et M′, symétriques par rapport à P_1 ? Si nous effectuons la même construction que précédemment, nous constatons que cette fois :

$$\begin{aligned}\vec{B}_\perp(M) &= -\vec{B}_\perp(M') \\ \vec{B}_\parallel(M) &= \vec{B}_\parallel(M')\end{aligned} \tag{9.7}$$

Si le point M appartient au plan d'antisymétrie, nous aurons :

$$\vec{B}_\perp(M) = -\vec{B}_\perp(M' = M) = \vec{0} \tag{9.8}$$

Le champ magnétique en un point appartenant à un plan d'antisymétrie P_{as} est nécessairement parallèle à ce plan. Remarquons que n'importe quel plan P_2 perpendiculaire aux deux fils est un plan d'antisymétrie. En effet, si P'' est le symétrique de P par rapport à un tel plan, le vecteur densité de courant $\vec{J}(P)$ se transformera en un vecteur opposé à $\vec{J}(P'')$. En conséquence de quoi le champ est nécessairement dans le plan perpendiculaire aux fils, ce qui est bien le cas.

9.3. Propriétés locales du champ magnétique

Au chapitre 3 nous avons étudié les propriétés locales du champ électrostatique, propriétés associées à sa divergence et son rotationnel. Que peut-on dire d'équivalent en ce qui concerne le champ magnétique ?

1 Divergence du champ magnétostatique

Pour calculer la divergence du champ magnétique $\vec{B}$, nous pouvons utiliser la relation de Biot et Savart (9.4) :

$$\vec{B}(\vec{r}_{\mathrm{M}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathrm{V}} \frac{\vec{J} \wedge \vec{u}_{\mathrm{PM}}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2} \,\mathrm{d}\tau$$

La divergence de ce champ au point M a pour expression :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \iiint_{\mathrm{V}} \frac{\vec{J} \wedge \vec{u}_{\mathrm{PM}}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2} \,\mathrm{d}\tau$$

Bien entendu, l'opérateur $\vec{\nabla}$ n'agit que sur les coordonnées du point M et pas du tout sur celles de P ou du courant $\vec{J}$. On peut donc faire entrer cet opérateur à l'intérieur de l'intégrale de volume :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathrm{V}} \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J} \wedge \vec{u}_{\mathrm{PM}}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2} \,\mathrm{d}\tau$$

Pour calculer cette intégrale, il convient de transformer l'expression à intégrer en utilisant les propriétés de différenciation d'un produit vectoriel

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) = B \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B})$$

et le fait que $\vec{\nabla}$ n'opère pas sur $\vec{J}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{J} \wedge \vec{u}_{\mathrm{PM}}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2} = -\vec{J} \cdot \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{u}_{\mathrm{PM}}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2} \right)$$

De plus, nous pouvons constater que $\vec{U}_{\mathrm{PM}}/|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2$ est au signe près le vecteur gradient de $1/|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|$. Le second terme de l'équation précédente apparaît donc comme le rotationnel d'un gradient, qui est donc toujours nul. Nous obtenons la relation fondamentale :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{9.9}$$

Cette équation est absolument générale, aucune condition particulière sur la forme du circuit n'ayant été nécessaire pour l'établir. Elle s'applique à toutes les distributions de courants.

Cette propriété locale du champ magnétique a un équivalent macroscopique. En effet, si nous calculons le flux de $\vec{B}$ à travers toute surface fermée S enveloppant le volume V, en vertu du théorème de Green (voir chapitre 3), nous obtenons :

$$\iint_{\mathrm{S}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{\mathrm{V}} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} \,\mathrm{d}\tau = 0$$

Le flux du champ magnétique à travers toute surface fermée est strictement nul. Tout comme l'équation 9.9, ce résultat fondamental est tout à fait général et s'applique à n'importe quelle distribution de courants. Il est intéressant de comparer cette équation à l'équation équivalente obtenue en électrostatique. Par analogie, la valeur nulle du flux magnétique à travers une surface fermée nous permet de conclure à l'inexistence de charges magnétiques isolées qui seraient l'équivalent des charges électriques. De plus, puisqu'il n'y a pas de charges magnétiques isolées à partir desquelles les lignes de champ magnétique

partiraient ou vers lesquelles elles convergeraient, toute ligne de champ magnétique doit donc se refermer sur elle-même, ne pouvant ni naître ni se terminer en un point de l'espace.

2 Rotationnel du champ magnétostatique - Théorème d'Ampère

Une seconde propriété locale du champ magnétique peut être décrite par le rotationnel de $\vec{B}$. Pour le calculer, nous allons procéder en deux temps. Nous commencerons par calculer la circulation de $\vec{B}$ le long d'une boucle fermée, puis nous en déduirons l'expression du rotationnel du champ magnétique en utilisant le théorème de Stockes (voir chapitre 3).

Circulation du champ magnétique

Considérons un contour fermé C_1 le long duquel on calcule la circulation de $\vec{B}$. Par définition, cette circulation $\mathcal{C}$ est égale à :

$$\mathcal{C} = \oint_{C_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}_1$$

$\mathrm{d}\,\vec{l}_1$ étant un déplacement infinitésimal sur le contour C_1. Supposons de plus que le champ magnétique $\vec{B}$ soit créé par un courant I circulant dans un circuit C_2. En introduisant la loi de Biot et Savart (9.3), nous pouvons réécrire la circulation sous la forme :

$$\mathcal{C} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}\,\vec{l}_2 \wedge \vec{u}_{\mathrm{PM}}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}_1 \qquad (9.10)$$

$\mathrm{d}\,\vec{l}_2$ étant un élément infinitésimal centré au point P du circuit C_2, $\vec{u}_{\mathrm{PM}}$ le vecteur unitaire de P vers M. Il est intéressant de noter que cette double intégration ne dépend que des contours C_1 et C_2, nous pouvons donc espérer pouvoir la décrire par le produit de l'intensité I et d'un terme purement géométrique.

En vertu des propriétés du produit mixte, l'expression 9.10 peut également s'écrire :

$$\mathcal{C} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}\,\vec{l}_1 \wedge \mathrm{d}\,\vec{l}_2}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2} \cdot \vec{u}_{\mathrm{PM}}$$

Examinons le nouvel élément à intégrer. Par définition, le produit vectoriel $\mathrm{d}\,\vec{l}_1 \wedge \mathrm{d}\,\vec{l}_2$ est le vecteur $\mathrm{d}^2\vec{S}$ dont le module représente l'aire d'un parallélogramme construit sur ces deux vecteurs et qui est orienté perpendiculairement à cette surface (fig. 9.8.a), aire qui correspond à celle qui serait balayée par l'élément de circuit $\mathrm{d}\,\vec{l}_2$ si on le déplaçait de $\mathrm{d}\,\vec{l}_1$.

Notons alors que l'élément $\left(\mathrm{d}\,\vec{l}_1 \wedge \mathrm{d}\,\vec{l}_2 \middle/ \left(|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2\right)\right) \cdot \vec{u}_{\mathrm{PM}}$ est, au signe près, l'angle solide infinitésimal $\mathrm{d}^2\Omega$ sous lequel on « voit » $\mathrm{d}^2\vec{S}$ depuis le point M du contour C_1 (voir la définition de l'angle solide en annexe). Ainsi, la première intégration le long du circuit C_2 correspond, toujours au signe près, à l'angle solide $\mathrm{d}\,\Omega$ sous lequel on voit depuis M la surface balayée par le circuit C_2 lorsqu'on le déplace d'une quantité infinitésimale $\mathrm{d}\,\vec{l}_1$ (fig. 9.8.b).

Il est utile de remarquer que cette intégration correspond également à la variation de l'angle solide sous lequel on « voit » le circuit C_2 lorsqu'on se déplace de la quantité $\mathrm{d}\,\vec{l}_1$ sur le contour C_1. Nous verrons au paragraphe 9.4 que cette propriété s'avère extrêmement

utile pour calculer les champs magnétiques lorsque les géométries sont telles que le calcul de l'angle solide sous lequel on voit le circuit est simple.

Il ne reste plus qu'à effectuer la seconde intégration sur le contour C_1.

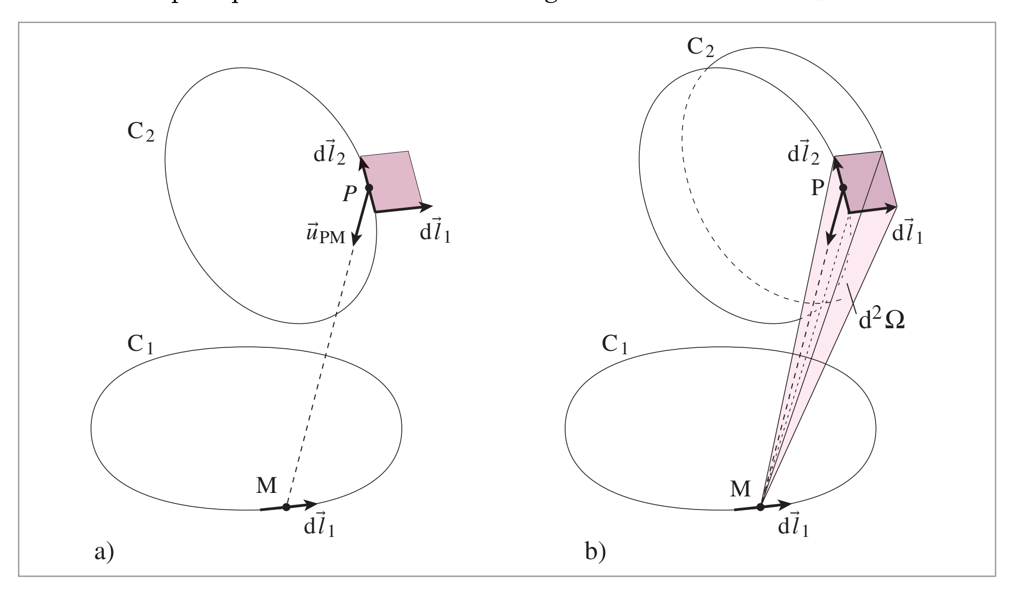


Fig. 9.8.

La généralisation du raisonnement précédent montre que l'intégration sur C_1 donne la variation de l'angle solide sous lequel on voit C_2 depuis C_1 lorsqu'on fait un tour complet. Compte tenu de la définition algébrique de l'angle solide, cette variation vaut 0 si C_1 et C_2 ne s'entrelacent pas, $\pm 4\pi$ si les deux courbes s'entrelacent ; le signe $+$ correspond au cas où le courant dans C_2 traverse la surface délimitée par le contour C_1 dans le sens de son orientation, le signe $-$ au cas contraire. Il est commode d'associer à ce courant une valeur algébrique positive dans le premier cas et négative dans le second.

Ainsi, nous pouvons donner une expression simple de la circulation du champ magnétique sur le contour C_1, connue sous le nom de théorème d'Ampère :

$$\mathcal{C} = \oint_{C_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}_1 = \mu_0 I \qquad (9.11)$$

La circulation du champ magnétique sur une courbe fermée est égale à μ_0 fois la somme algébrique des courants qui traversent cette courbe.

Un peu d'histoire

Première formulation du théorème d'Ampère

La forme explicite du théorème d'Ampère n'a pas été donnée par Ampère lui-même en 1820 ; il fallut attendre la publication d'un mémoire de Lord Kelvin en 1850 pour la trouver sous sa forme actuelle.

Rotationnel du champ magnétique

Nous allons maintenant établir une formulation locale du théorème d'Ampère. Le théorème de Stokes (voir annexe) nous permet en effet d'écrire :

$$\mathcal{C} = \oint_{C_1} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}_1 = \iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \mu_0 I$$

S étant une surface limitée par le contour C_1. Nous pouvons formellement introduire la densité de courant $\vec{J}$ traversant la surface S (bien entendu, dans le cas du circuit C_1 étudié, cette densité est non nulle uniquement à l'intérieur du circuit lui-même, elle sera prise nulle ailleurs) ; nous avons donc par définition :

$$I = \iint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\iint_S \vec{\nabla} \wedge \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \mu_0 \iint_S \vec{J} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S}$$

Puisque cette équation est vraie quels que soient le contour et la surface qui s'appuie dessus, nous pouvons en déduire l'expression locale du rotationnel de $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad (9.12)$$

3 Loi de continuité du champ magnétique

Au chapitre 3, nous avons discuté le comportement du champ électrique lors de la traversée d'une surface chargée. Nous avons montré la continuité de la composante tangentielle du champ électrique et la discontinuité de sa composante normale. Nous allons nous intéresser ici au comportement du champ magnétique au passage d'une nappe de courant plane, infinie et homogène.

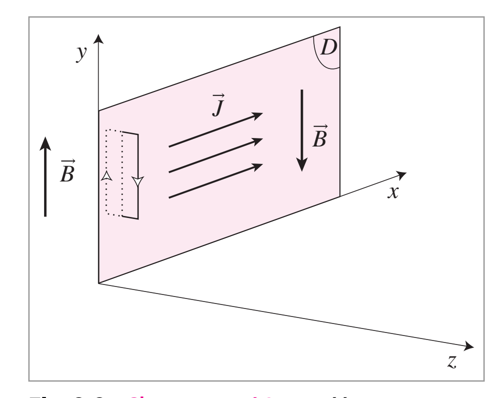


Fig. 9.9. Champ magnétique **créé par une nappe de courant.**

Calculons le champ magnétique créé par une telle nappe. Par commodité, plaçons-nous en coordonnées cartésiennes, la densité linéaire de courant $\vec{j}$ étant supposée orientée dans la direction $\vec{u}_x$ (fig. 9.9).

Cette distribution homogène de courants est invariante par translation du plan. Par symétrie, le champ magnétique $\vec{B}$ qu'elle crée ne peut donc dépendre ni de x ni de y. Par ailleurs, tout plan P parallèle à $\vec{J}$ et perpendiculaire à la nappe étant un plan de symétrie magnétique, le champ $\vec{B}$ en tout point du plan P doit donc lui être perpendiculaire, $\vec{B}$ n'a donc pas de composante suivant Ox. De même, tout plan P′, perpendiculaire à la nappe et à $\vec{J}$ étant un plan d'antisymétrie magnétique, le champ $\vec{B}$ en tout point appartenant à ce plan doit par symétrie appartenir à P′. Le champ magnétique $\vec{B}$ ne peut donc avoir de composante que suivant Oy. Ainsi, le champ magnétique en un point M(x, y, z) peut s'écrire :

$$\vec{B}(x, y, z) = B_y(z)\,\vec{u}_y$$

Enfin, la nappe elle-même est un plan de symétrie magnétique, aussi si M′ est le symétrique géométrique de M par rapport au plan xOy, nous aurons :

$$\begin{aligned}\vec{B}(\mathrm{M}') &= -\vec{B}(\mathrm{M})\\ \vec{B}(x,y,-z) &= -\vec{B}(x,y,z),\\ B_y(-z) &= -B_y(z)\end{aligned}$$

Il ne reste donc plus qu'à calculer la composante $B_y(z)$. Puisque le courant $\vec{J}$ est orienté suivant Ox, la formulation locale (9.12) du théorème d'Ampère nous permet d'affirmer que la composante suivant Oy du rotationnel de $\vec{B}$ est nulle :

$$\begin{aligned}(\vec{\nabla} \wedge \vec{B})_y &= \mu_0 J_y = 0\\ \frac{\partial B_y}{\partial z} &= 0\end{aligned}$$

La composante B_y est donc une constante indépendante de z. Pour déterminer cette constante, nous calculerons la circulation du champ $\vec{B}$ sur un contour rectangulaire situé dans le plan yOz symétriquement de part et d'autre de la nappe (fig. 9.9). D'après le théorème d'Ampère, nous pouvons écrire :

$$2B_y L = -\mu_0 J L$$

L étant la longueur du côté du contour parallèle à la direction y. Nous obtenons ainsi l'expression générale du champ magnétique $\vec{B}$ en tout point M(x, y, z) de l'espace :

$$\vec{B}(\mathrm{M}) = -\frac{\mu_0 J}{2}\,\mathrm{sgn}(z)\,\vec{u}_y \tag{9.13}$$

Il y a discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique de part et d'autre de la nappe de courant supposée infiniment mince. À l'inverse, chaque fois que la composante d'un champ magnétique, parallèle à une surface, présentera une discontinuité au passage de cette surface, nous pourrons conclure qu'il existe une nappe de courant circulant dans cette surface.

9.4. Exemples de calcul du champ magnétique créé par différentes distributions de courants

1 Champ créé par un fil infini parcouru par un courant I

Considérons un fil infini parcouru par un courant uniforme I (fig. 9.10). Calculons le champ magnétique en tout point M, caractérisé par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z), l'axe Oz étant confondu avec le fil.

Application de la loi de Biot et Savart

Le champ élémentaire $\mathrm{d}\vec{B}$ créé au point M par un élément infinitésimal du fil $\mathrm{d}\vec{l}$ situé au point P est égal par définition à :

$$\mathrm{d}\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{u}_{\mathrm{PM}}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2} \qquad (9.14)$$

Cette contribution est située dans le plan perpendiculaire au fil passant par M, son orientation est déterminée par la règle du trièdre direct (règle du « bonhomme d'Ampère ») et son module $\mathrm{d}B$ vaut :

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}l \sin\beta}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2}$$

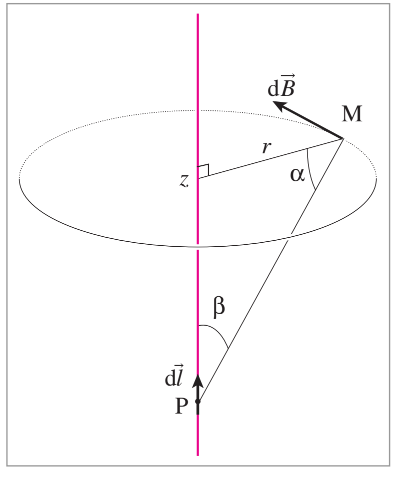


Fig. 9.10. Champ magnétique **créé par un fil infini parcouru par un courant constant.**

β étant l'angle entre, $\mathrm{d}\vec{l}$ et $\vec{u}_{\mathrm{PM}}$. Le champ total $\vec{B}(\mathrm{M})$ est la somme vectorielle de toutes les contributions $\mathrm{d}B(\mathrm{M})$. Toutes ces contributions étant orthoradiales, le module du champ total est donc simplement la somme de tous les modules $\mathrm{d}B$. Pour effectuer cette somme, il est commode d'exprimer la contribution infinitésimale $\mathrm{d}B$ en fonction de β et de la distance r de M au fil. La coordonnée z étant égale à $r \cot\beta$, la longueur de l'élément $\mathrm{d}l$ peut s'écrire :

$$\mathrm{d}l = \mathrm{d}z = r\frac{\mathrm{d}\beta}{\sin^2\beta}$$

De plus

$$\frac{1}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2} = \frac{\sin^2\beta}{r^2}$$

Nous obtenons ainsi :

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\sin\beta\,\mathrm{d}\beta}{r}I$$

Pour calculer le champ magnétique créé par l'ensemble du fil, il suffit maintenant d'intégrer sur toutes les valeurs possibles de β ou, ce qui revient au même, compter deux fois l'ensemble $\mathrm{d}\vec{l}$ correspondant à des z positifs. β varie de $\frac{\pi}{2}$ à π et $B(r)$ est égal à :

$$B(r) = \frac{2\mu_0}{4\pi}I\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\frac{\sin\beta\,\mathrm{d}\beta}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi r}I \qquad (9.15)$$

Application du théorème d'Ampère

Pour calculer le champ magnétique créé par ce fil rectiligne, nous pouvons procéder différemment, en déterminant son orientation par des arguments de symétrie puis en calculant son module à l'aide du théorème d'Ampère.

Nous avons vu au paragraphe 9.2 que la symétrie de la distribution de courant permet de conclure que le champ $\vec{B}$ est nécessairement orthoradial et qu'il est indépendant de z et θ. Pour calculer la circulation de $\vec{B}$, il est donc judicieux de choisir pour contour un

cercle de rayon r, centré sur le fil. En appliquant à ce contour particulier la relation 9.11, nous obtenons :

$$\oint \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \oint \vec{B} \cdot r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta = \oint Br\,\mathrm{d}\theta = 2\pi r B = \mu_0 I$$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

2 Champ créé par une spire circulaire de rayon *R*, parcourue par un courant *I*

Considérons une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant I (fig. 9.11). Nous nous contenterons ici de calculer le champ magnétique le long de l'axe de révolution de la spire, confondu avec l'axe Oz des coordonnées cylindriques.

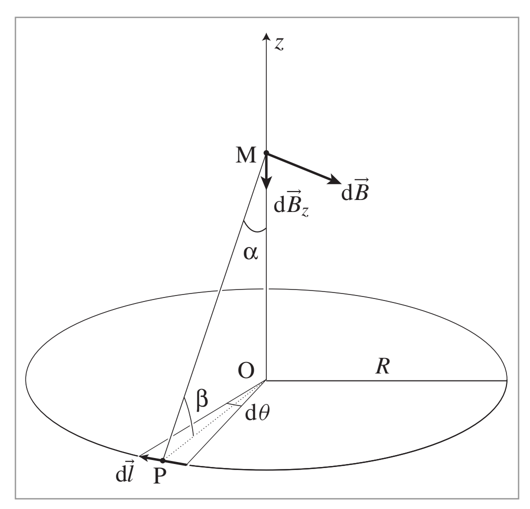


Fig. 9.11. **Champ magnétique créé par une spire parcourue par un courant constant.**

Comme dans le cas du fil rectiligne infini, nous allons tout d'abord considérer la contribution au champ magnétique créé par un élément infinitésimal de la spire. Ce champ élémentaire d$\vec{B}$, créé au point M(z) par un élément d$\,\vec{l}$ de la spire situé en P, est donné par la relation 9.14. Cette contribution, dont la direction et le sens sont donnés par la règle du trièdre direct (règle du « bonhomme d'Ampère »), n'est pas orienté suivant l'axe Oz ; toutefois, comme nous l'avons montré au paragraphe 9.2, la symétrie de la distribution de courant nous impose un champ magnétique total dirigé suivant Oz, aussi sera-t-il suffisant de nous intéresser uniquement à la composante z de cette contribution. La projection de d$\vec{B}$ sur l'axe Oz est égale à :

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{\mathrm{d}l \cos\beta}{\left|\vec{r}_\mathrm{P} - \vec{r}_\mathrm{M}\right|^2}$$

Le module du champ magnétique total créé par la spire, orienté suivant Oz est égal à la somme de toutes ces contributions infinitésimales. Puisque nous pouvons écrire :

$$\cos\beta = \frac{R}{\left|\vec{r}_\mathrm{P} - \vec{r}_\mathrm{M}\right|}$$

$$\mathrm{d}l = R\,\mathrm{d}\theta$$

Cette sommation revient à intégrer sur toutes les valeurs possibles de θ. Nous obtenons ainsi :

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_0^{2\pi} \frac{R^2\,\mathrm{d}\theta}{\left|\vec{r}_\mathrm{P} - \vec{r}_\mathrm{M}\right|^3} = \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \qquad (9.16)$$

En particulier, le champ magnétique au centre de la spire, en $z = 0$, est égal à :

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}$$

3 Champ créé par un solénoïde infini de *n* spires de rayon *R* par unité de longueur, parcouru par un courant *I*

Considérons un solénoïde infini, constitué de n spires jointives par unité de longueur, parcouru par un courant I (fig. 9.12), l'axe du solénoïde étant confondu avec l'axe Oz des coordonnées cylindriques. Nous calculerons successivement le champ magnétique à l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde.

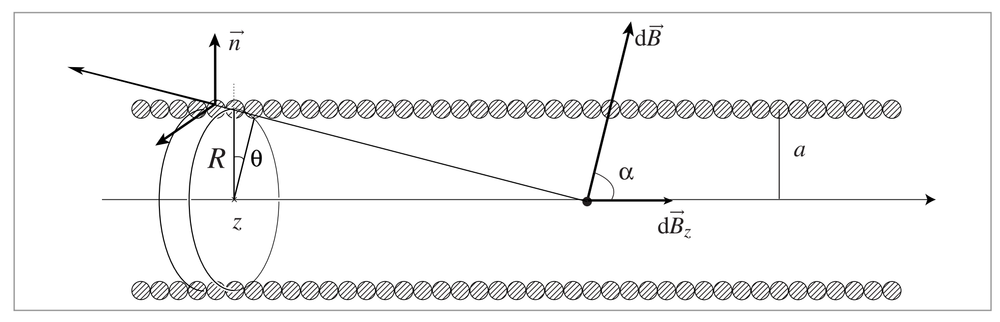


Fig. 9.12. Champ magnétique créé le long de l'axe de révolution d'un solénoïde infini.

Un peu d'histoire

Solénoïde

Ampère écrivit en 1820 qu'il avait fait construire « des hélices en fil de laiton pour imiter tous les effets de l'aimant… et qu'il avait réussi ». Il appellera en 1822 ces hélices « solénoïdes », du grec *solên*, « tuyau, étui », et du suffixe *oïde* « en forme de ».

Solénoïde infini représenté par une nappe cylindrique de courant

Cette distribution de courant est invariante par translation et rotation autour de l'axe Oz (on néglige la très faible composante longitudinale du courant due à l'enroulement du solénoïde) ; le champ magnétique au point M(r, θ, z) ne dépend donc a priori que de la coordonnée radiale r. De plus, tout plan perpendiculaire à l'axe du solénoïde étant un plan de symétrie magnétique, $\vec{B}$ devra donc être perpendiculaire à ce plan :

$$\vec{B} = B_z(r)\vec{u}_z$$

Nous pouvons maintenant en déduire qu'à l'extérieur comme à l'intérieur du solénoïde, le module de $\vec{B}$ est constant. En effet, la circulation de $\vec{B}$ sur tout contour rectangulaire dont un côté est parallèle à l'axe Oz contenu tout entier à l'extérieur ou à l'intérieur du solénoïde est nulle en vertu du théorème d'Ampère puisqu'il n'y pas de courant qui

le traverse. Les contributions parallèles à Oz doivent donc se compenser, ceci n'étant possible que si $B_z(r)$ est indépendant de r.

Évaluons maintenant ces constantes. Commençons par le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde. Ce champ constant est égal en particulier à celui sur l'axe de révolution Oz. Or ce champ peut être calculé facilement en utilisant le principe de superposition. Considérons en effet un élément de solénoïde constitué de $n\,\mathrm{d}z$ spires et calculons sa contribution au champ en un point O situé à la distance z du centre de cet élément. En généralisant l'expression 9.16 du champ crée par une spire sur son axe de révolution, nous obtenons :

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{R^2\,\mathrm{d}z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

Pour obtenir le champ total, il suffit de sommer sur toutes les valeurs possibles de z :

$$B = \frac{\mu_0 n I}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{R^2\,\mathrm{d}z}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

En introduisant l'angle α tel que $z/R = \tan\alpha$, nous pouvons écrire :

$$B = \mu_0 n I \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \mu_0 n I$$

La détermination du module du champ magnétique extérieur B_{ext} est alors immédiate. Considérons le contour présenté sur la figure 9.13, le théorème d'Ampère nous donne :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = (B_{\mathrm{int}} - B_{\mathrm{ext}})z = \mu_0 n z I$$

Nous obtenons ainsi la valeur du champ magnétique à l'extérieur du solénoïde :

$$B_{\mathrm{ext}} = 0$$

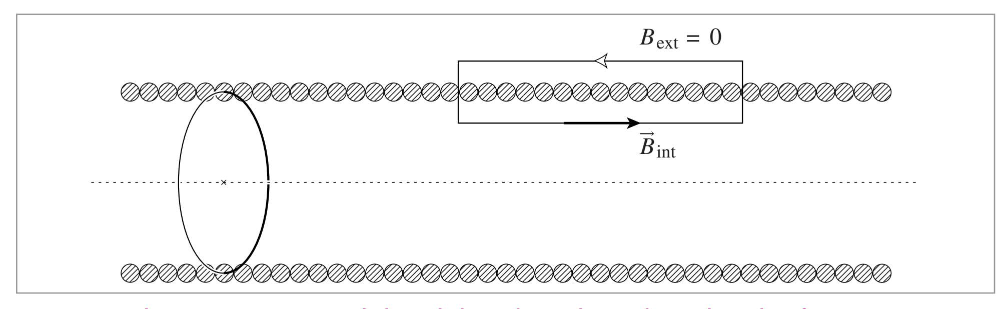


Fig. 9.13. Champ magnétique créé le long de l'axe de révolution d'un solénoïde infini.

Utilisation de l'angle solide

Considérons un élément $\mathrm{d}\vec{l}$ d'une « spire » constituée par une longueur $\mathrm{d}z$ du solénoïde, soit $n\,\mathrm{d}z$ spires réelles. Cet élément créé au point M situé sur l'axe Oz un champ élémentaire dont le module $\mathrm{d}B$ est égal par définition à :

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0}{4\pi} I n\,\mathrm{d}z \frac{R\,\mathrm{d}\theta}{r^2}$$

r étant la distance de la « spire » au point M (fig. 9.14).

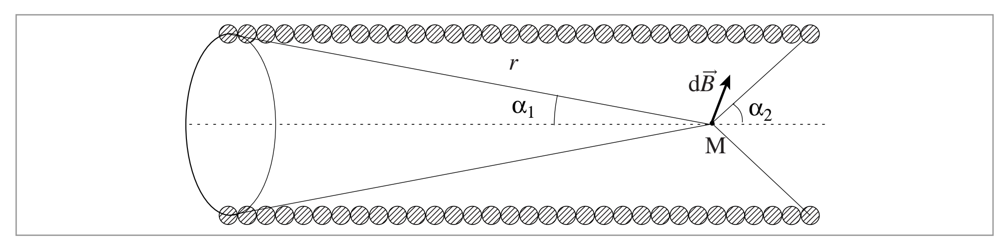


Fig. 9.14.

La symétrie de la distribution de courant imposant que le champ magnétique soit dirigé le long de Oz, nous pouvons restreindre le calcul à la projection de d$\vec{B}$ sur cet axe :

$$\mathrm{d}B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} In\,\mathrm{d}z \frac{2\pi R}{r^2} \sin\alpha = \frac{\mu_0}{4\pi} nI \frac{\mathrm{d}S \sin\alpha}{r^2}$$

Dans cette relation, $\mathrm{d}S = 2\pi R\,\mathrm{d}z$ est la surface latérale élémentaire d'un cylindre de hauteur $\mathrm{d}z$; $\frac{\mathrm{d}S\sin\alpha}{r^2}$ est donc l'angle solide $\mathrm{d}\Omega$ sous lequel on « voit » cette surface élémentaire depuis le point M. Le module du champ magnétique total est donc égal à :

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi} nI\Omega$$

Ω étant l'angle solide sous lequel on voit l'ensemble du solénoïde. Pour un solénoïde infini, $\Omega = 4\pi$, nous obtenons alors $B = \mu_0 nI$. Pour un solénoïde de longueur L finie (fig. 9.14), l'angle solide Ω est égal à :

$$\Omega = 4\pi - \big(2\pi(1-\cos\alpha_1) + 2\pi(1-\cos\alpha_2)\big) = 2\pi(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$

$2\pi(1-\cos\alpha_1)$ et $2\pi(1-\cos\alpha_2)$ étant respectivement les angles solides sous lesquels on « voit » les extrémités du solénoïde du point M. Ainsi, le champ magnétique à l'intérieur d'un solénoïde de longueur finie obéit à la relation :

$$B = \frac{\mu_0 nI}{2}(\cos\alpha_1 + \cos\alpha_2)$$

Exercices

1 Chercher la dimension des modules des vecteurs champ électrique et magnétique, de μ_0 et ε_0 dans le système international d'unités. En déduire la dimension du produit $\mu_0\varepsilon_0$.

2 **a.** Calculer le champ magnétique produit par une portion de fil rectiligne conducteur de longueur finie L et parcouru par un courant I, en un point quelconque M de l'espace situé à la distance a du fil, en dehors du plan médian.

b. Retrouver le champ magnétique créé par un fil infini.

c. Donner la valeur du champ si le point M appartient au plan médian.

3 Calculer le champ magnétique produit en son centre, par un polygone régulier de n côtes, de rayon circonscrit R et parcouru par un courant I. Retrouver le champ créé par la spire circulaire.

4 Calculer le champ magnétique produit, en un point quelconque de son axe par une spire carrée de côté l, parcourue par un courant I. En déduire l'expression de ce champ dans les cas particuliers suivants : au centre de la spire et très loin du centre. Que peut-on en conclure ?

5 Une sphère conductrice, portée au potentiel V, tourne sur elle-même autour d'un de ses axes de symétrie à vitesse angulaire constante ω. Calculer le champ magnétique créé au centre de la sphère. En considérant que la Terre est conductrice et que le champ électrique à sa surface est d'environ 100 V/m quel serait le champ magnétique terrestre associé ? Que peut-on conclure si on compare ce résultat à la valeur réelle du champ magnétique terrestre ?

Indice. *On assimilera la sphère à une collection de spires circulaires parcourues par un courant que l'on exprimera en fonction de la densité superficielle charges σ de la sphère.*

6 Calculer le champ magnétique créé à l'intérieur et à l'extérieur d'un fil rectiligne infini parcouru par un courant I, sa section étant circulaire de rayon R.
Indice. *Utiliser le théorème d'Ampère et les symétries ; introduire la densité de courant*

7 Soit un fil de cuivre d'axe Oz, de longueur infinie et de rayon R, dans lequel est creusée une cavité cylindrique de rayon R', d'axe O′z′ parallèle à Oz et tel que OO′ = a.

a. Montrer qu'il existe un champ magnétique dans la cavité cylindrique si le conducteur est parcouru par un courant uniforme I.

b. Calculer l'orientation et le module de ce champ.

8 Une balance de Cotton est réalisée comme indiqué sur le schéma. O est un couteau horizontal, autour duquel pivote un fléau ; à l'un des bras de celui-ci, en R, est accroché un plateau de trébuchet. L'ensemble OQPNM, qui constitue l'autre bras, comporte deux arcs de cercle centrés en O : MQ et NP.

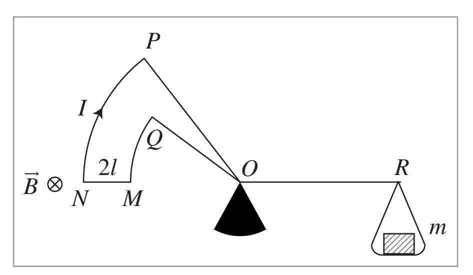


Fig. 9.15. Une balance de Cotton

En O, un fil conducteur suit le trajet OQAINPO. Il est relié à deux connexions souples qui permettent d'y faire circuler un courant I, Dans la région de la portion MN du circuit, règne un champ magnétique $\vec{B}$ parallèle au couteau (donc perpendiculaire à la portion MN).

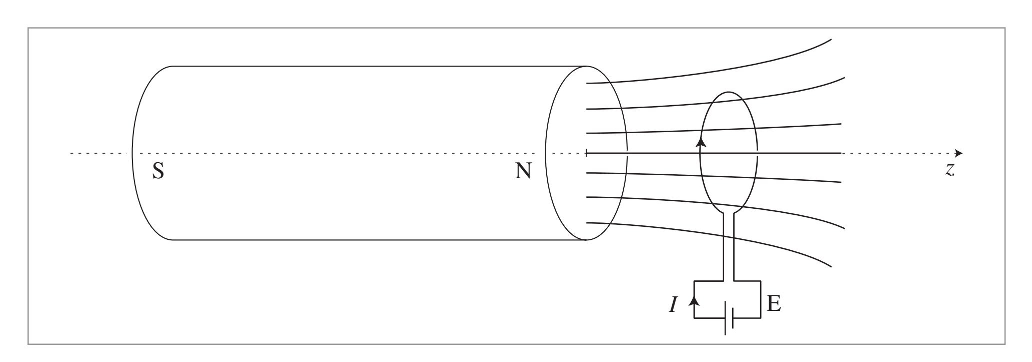
a. Montrer que seule intervient dans l'équilibre de la balance, la force de Laplace relative à la portion MN.

b. Quelle masse m faut-il placer dans le plateau de la balance pour assurer cet équilibre si OR = 10 cm ; NO = 9 cm, l = 1 cm, $B = 10^{-1}$ T, I = 5 A.

9 Une petite spire circulaire reliée à une source de courant est placée de façon à ce que son axe coïncide avec celui d'un aimant permanent cylindrique de rayon plus grand, dont on a représenté sur la figure ci-dessous quelques lignes de champ magnétique.

a. Trouver suivant la distance de la spire à l'aimant, la direction de la force subie par la spire. Que se passe-t-il expérimentalement ?

b. Vérifier que, si on est suffisamment loin de l'aimant, la règle dite du « flux maximum » est respectée, c'est-à-dire que $\vec{F}$ tend à déplacer la spire dans le sens qui augmente le flux de $\vec{B}$ à travers la surface.



Chapitre 10

Le potentiel vecteur

Nous avons vu en électrostatique qu'une distribution de charges crée, en tout point de l'espace, un potentiel scalaire $V(\vec{r})$ qui permet de décrire les propriétés électrostatiques associées à cette distribution. Nous allons montrer dans ce chapitre qu'il existe une notion équivalente en magnétostatique, le potentiel vecteur $\vec{A}(\vec{r})$ créé par une distribution de courant. Après en avoir donné la définition et les principales propriétés, nous calculerons ce potentiel sur quelques exemples.

10.1 Potentiel vecteur et champ magnétique

1 Définition du potentiel vecteur
2 Choix de jauge
3 Potentiel vecteur et flux du champ magnétique
4 Exemples de potentiels vecteurs associés à un champ magnétique constant

10.2 Potentiel vecteur associé à des courants continus

1 Définition de $\vec{A}$ à partir des courants
2 Équation locale du potentiel vecteur

10.3 Exemples de potentiels vecteurs

1 Fil rectiligne parcouru par un courant uniforme
2 Champ magnétique créé par une boucle de courant : dipôle magnétique
3 Potentiel vecteur associé à un solénoïde

Mots-clés

- **Potentiel vecteur**
- **Choix de jauge**

10.1. Potentiel vecteur et champ magnétique

1 Définition du potentiel vecteur

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que le champ magnétique $\vec{B}$ obéit à la relation fondamentale :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \tag{10.1}$$

Cette équation permet d'identifier le champ $\vec{B}$ au rotationnel d'un autre champ de vecteurs $\vec{A}$ puisque la divergence de tout rotationnel est nulle et que réciproquement tout champ de divergence nulle est le rotationnel d'un autre champ. Nous pouvons ainsi poser :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \tag{10.2}$$

Par définition, ce champ de vecteur $\vec{A}$ est appelé le « potentiel vecteur » associé au champ magnétique $\vec{B}$. Précisons dès à présent que la définition 10.2 n'en est pas une à proprement parler, plusieurs champs de vecteurs différents pouvant satisfaire cette équation. En effet, si nous considérons non plus le potentiel vecteur $\vec{A}$ mais le potentiel vecteur $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi$, il vérifie également l'équation 10.2 puisque le rotationnel d'un gradient est nul. Le potentiel vecteur n'est donc défini qu'à un gradient de champ scalaire Ψ près, résultat qui est à rapprocher de la définition du potentiel scalaire à une constante près.

Un peu d'histoire

Introduction du potentiel vecteur

C'est en tentant de développer une représentation mécaniste des forces magnétiques par l'intermédiaire de l'élasticité des solides que Thomson, lord Kelvin, est amené à introduire en 1847 un « potentiel vecteur » dont le « champ magnétique, » serait le « rotationnel », ce potentiel ne dépendant que des intensités et de la forme des circuits qui produisent le champ. Celle idée sera reprise par la suite par Maxwell.

2 Choix de jauge

Le choix d'un potentiel scalaire Ψ permettant de définir complètement le potentiel vecteur $\vec{A}$ est appelé « choix de jauge ». Nous dirons que $\vec{B}$ est invariant par changement de jauge puisque l'ajout de n'importe quel potentiel scalaire Ψ ne modifie pas le champ $\vec{B}$. Cette propriété est très utile. Elle permet en particulier de choisir le potentiel vecteur le plus adapté au problème traité, c'est-à-dire celui qui simplifie au maximum les calculs ultérieurs. En magnétostatique, nous verrons qu'il est commode (voir 10.2) de sélectionner le potentiel vecteur tel que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0 \tag{10.3}$$

Ainsi, nous choisirons de définir le potentiel vecteur $\vec{A}$ comme le champ de vecteurs vérifiant les deux équations 10.2 et 10.3. $\vec{A}$ est alors défini dans la jauge dite de « Coulomb ».

3 Potentiel vecteur et flux du champ magnétique

L'évaluation de la circulation de $\vec{A}$ le long d'un contour fermé nous permet de préciser le sens physique de ce potentiel vecteur. Si nous calculons la circulation de $\vec{A}$ sur un contour C entourant une surface S nous obtenons, en utilisant le théorème de Stockes (voir chapitre 3), la relation :

$$\oint_{C} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \iint_{S} \vec{\nabla} \wedge \vec{A} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \iint_{S} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \Phi$$

La circulation du potentiel vecteur $\vec{A}$ sur le contour C est ainsi égale au flux Φ du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la surface S. Ce flux s'exprime en Weber : 1 weber correspond au flux d'un champ magnétique de 1 tesla à travers une surface de 1 m^2.

4 Exemples de potentiels vecteurs associés à un champ magnétique constant

Considérons un champ magnétique $\vec{B}$ constant et calculons les expressions des potentiels vecteurs pouvant être associés à un tel champ magnétique. Nous pouvons choisir le repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ tel que $\vec{B} = B\vec{u}_z$. Dans ce repère, la relation $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ se traduit par les trois équations :

$$\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = B$$

Conformément au principe d'invariance de jauge de $\vec{B}$, une infinité de potentiels vecteurs peuvent satisfaire à ces équations. En particulier, les trois champs de vecteur suivants remplissent ces conditions :

$$1)\begin{cases} A_x = -By \\ A_y = 0 \\ A_z = 0 \end{cases} \qquad 2)\begin{cases} A_x = 0 \\ A_y = -Bx \\ A_z = 0 \end{cases} \qquad 3)\begin{cases} A_x = -\dfrac{1}{2}By \\ A_y = \dfrac{1}{2}Bx \\ A_z = 0 \end{cases}$$

Nous pouvons remarquer à l'aide de ces trois exemples dont les variations sont illustrées sur la figure 10.1, que des potentiels vecteurs d'aspects très différents conduisent pourtant à un même champ magnétique $\vec{B}$.

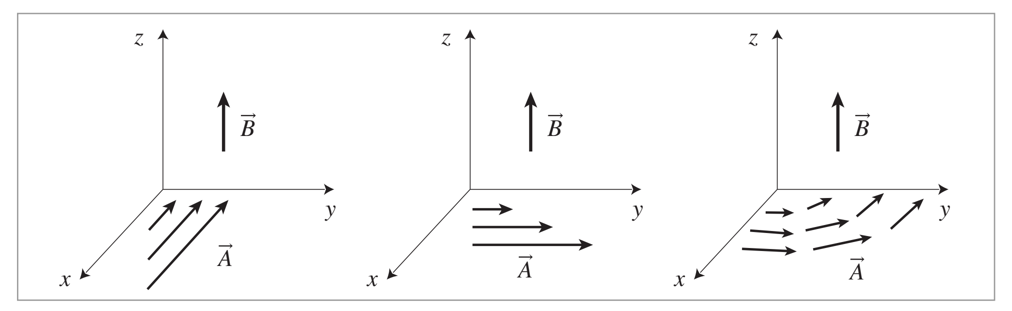


Fig. 10.1. Exemples de potentiels vecteur **décrivant un champ magnétique uniforme et constant parallèle à l'axe Oz.**

10.2. Potentiel vecteur associé à des courants continus

Le potentiel vecteur $\vec{A}$ peut également s'exprimer directement en fonction des courants qui créent le champ magnétique $\vec{B}$. Ce calcul de $\vec{A}$ en fonction des courants est parfois plus simple que le calcul direct de $\vec{B}$, il est alors commode de commencer par calculer $\vec{A}$ puis d'utiliser la relation 10.2 pour déterminer $\vec{B}$.

1 Définition de $\vec{A}$ à partir des courants

Il existe plusieurs manières de déterminer les expressions des composantes du potentiel vecteur $\vec{A}$ en fonction des distributions de courants. Commençons ici par la plus naturelle, obtenue directement à partir de l'expression macroscopique du champ magnétique donnée par Biot et Savart.

Expression de $\vec{A}$ à partir de la loi de Biot et Savart

Revenons à la relation 9.3 donnée par Biot et Savart pour décrire le champ magnétique créé en un point M par une distribution de courants caractérisée par la densité de courant $\vec{J}$:

$$\vec{B}(\vec{r}_{\mathrm{M}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{u}_{\mathrm{PM}}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathrm{V}} \frac{\vec{J} \wedge \vec{u}_{\mathrm{PM}}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2} \,\mathrm{d}\tau$$

Pour déterminer une expression du potentiel vecteur $\vec{A}$ en fonction des courants, nous allons mettre ce champ magnétique sous la forme d'un rotationnel. Nous avions remarqué au chapitre précédent que :

$$\frac{\vec{u}_{\mathrm{PM}}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|^2} = -\vec{\nabla}\left(\frac{1}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|}\right)$$

Dans cette relation, $\vec{\nabla}$ représente l'opérateur gradient n'agissant que sur les coordonnées du point M. Nous obtenons ainsi une autre expression du champ magnétique :

$$\vec{B}(\vec{r}_{\mathrm{M}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathrm{V}} \left(\vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|} \right) \wedge \vec{J} \right) \mathrm{d}\tau \qquad (10.4)$$

Par ailleurs, nous pouvons appliquer la relation vectorielle :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(f(\vec{r})\vec{G} \right) = f(\vec{r})\vec{\nabla} \wedge \vec{G} + \vec{\nabla} f(\vec{r}) \wedge \vec{G} \qquad (10.5)$$

dans laquelle $f(\vec{r})$ et $\vec{G}$ représentent respectivement une fonction scalaire et un vecteur quelconques. L'expression 10.4 du champ magnétique $\vec{B}$ peut donc se réécrire sous la forme :

$$\vec{B}(\vec{r}_{\mathrm{M}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathrm{V}} \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{J}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|} \right) \mathrm{d}\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathrm{V}} \left(\frac{1}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|} \right) \vec{\nabla} \wedge \vec{J} \, \mathrm{d}\tau$$

L'opérateur n'agissant que sur les coordonnées du point M, $\vec{\nabla} \wedge \vec{J}$ est nul par définition. Le champ magnétique est donc simplement égal à la première intégrale :

$$\vec{B}(\vec{r}_{\mathrm{M}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathrm{V}} \vec{\nabla} \wedge \left(\frac{\vec{J}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|} \right) \mathrm{d}\tau$$

En comparant cette expression à la relation 10.2, nous obtenons par identification l'expression du potentiel vecteur $\vec{A}$:

$$\vec{A}(\vec{r}_{\mathrm{M}}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{\mathrm{V}} \frac{\vec{J}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|} \mathrm{d}\tau = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{\mathrm{d}\vec{l}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|} \qquad (10.6)$$

$\mathrm{d}\vec{l}$ étant un élément infinitésimal centré en P du circuit parcouru par le courant uniforme I. Ainsi, le calcul de chacune des composantes du potentiel vecteur revient à une intégrale de volume de la composante de la densité de courant correspondante.

Notons que cette intégrale est de même forme que celle rencontrée dans le calcul du potentiel scalaire $V(\vec{r})$ créé par une distribution de charges ρ (voir chapitre 4). Dans de nombreux cas, nous profiterons de cette analogie pour déterminer les composantes du potentiel vecteur à partir des résultats préalablement connus en électrostatique, il conviendra alors de remplacer ρ/ε_0 par les composantes $\mu_0 J_{\mathrm{i}}$ correspondantes.

Remarquons également que le potentiel vecteur $\vec{A}$ se transforme comme la densité de courant $\vec{J}$ par les opérations de symétrie associées à la distribution de courants. $\vec{A}$ est donc un « vrai » vecteur qui se transforme selon les relations 3.10 et 3.11, le champ magnétique étant lui, comme nous l'avons vu, un pseudo-vecteur se transformant selon les relations 9.5 à 9.8.

Jauge de Coulomb

Nous allons maintenant vérifier que le potentiel vecteur donné par l'expression 10.6 correspond à celui de la jauge de Coulomb satisfaisant à la relation $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot \iiint_{\mathrm{V}} \frac{\vec{J}}{|\vec{r}_{\mathrm{P}} - \vec{r}_{\mathrm{M}}|} \mathrm{d}\tau$$

En utilisant la relation vectorielle $\vec{\nabla} \cdot (f\vec{G}) = f\vec{\nabla} \cdot \vec{G} + (\vec{\nabla}f) \cdot \vec{G}$, nous pouvons écrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, d\tau + \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} \right) d\tau$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} \, d\tau \qquad (10.7)$$

puisque $\vec{\nabla}$ n'agit que sur $\vec{r}_M$.

L'étape suivante consiste à introduire dans 10.7 non plus le gradient $\vec{\nabla}$ par rapport à $\vec{r}_M$ mais celui par rapport à $\vec{r}_P$, noté $\vec{\nabla}_P$. Nous pouvons facilement établir la relation :

$$\vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} = -\vec{\nabla}_P \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|}$$

Le second terme de la relation 10.7 peut donc se réécrire :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{\nabla} \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} \, d\tau = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J} \cdot \vec{\nabla}_P \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} \, d\tau$$

$$= \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{1}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} \vec{\nabla}_P \cdot \vec{J} \, d\tau - \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{\nabla}_P \cdot \frac{\vec{J}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} \, d\tau$$

Le premier terme de cette expression est nul, la conservation de la charge électrique dans le circuit imposant $\vec{\nabla}_P \cdot \vec{J} = 0$, nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{\nabla}_P \cdot \frac{\vec{J}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|} \, d\tau$$

Si nous appliquons le théorème de Green-Ostrogradski à cette expression l'intégrale apparaît comme le flux de $\vec{J} / |\vec{r}_P - \vec{r}_M|$ à travers la surface limitant le circuit. La densité de courant étant par définition localement parallèle à cette surface, ce flux est nul. Ainsi nous pouvons conclure que $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

2 Équation locale du potentiel vecteur

Pour obtenir l'équation locale devant être vérifiée par le potentiel vecteur $\vec{A}$, considérons la propriété locale du champ magnétique :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

En introduisant dans cette équation, la relation $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ et utilisant la relation $\vec{\nabla} \wedge (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, nous obtenons l'équation vectorielle :

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}$$

Comme nous pouvons toujours choisir pour potentiel vecteur celui correspondant à la jauge de Coulomb $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, l'équation fondamentale devant être vérifiée par le potentiel vecteur s'écrit simplement :

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \tag{10.8}$$

Dans le cas de coordonnées cartésiennes, cette équation est équivalente au système d'équations associées à chaque composante A_i :

$$(\nabla^2 \vec{A})_i = \nabla^2 \vec{A}_i = -\mu_0 J_i$$

Chacune de ces équations a la même structure que l'équation de Poisson présentée au chapitre 4 pour décrire les propriétés du potentiel scalaire $V(\vec{r})$ créé par une distribution de charges ρ. Ainsi tous les résultats obtenus concernant le potentiel scalaire $V(\vec{r})$, associé à une distribution de charges $\rho(\vec{r})$ donnée, pourront être utilisés pour déterminer les composantes du potentiel vecteur $\vec{A}$ lorsque des distributions de courants analogues à ces distributions de charges existent. Il suffira de remplacer dans les différents résultats ρ/ε_0 par $\mu_0 J_i$.

10.3. Exemples de potentiels vecteurs

Nous allons maintenant utiliser ces définitions pour déterminer le potentiel vecteur associé à quelques distributions de courants simples.

1 Fil rectiligne parcouru par un courant uniforme

Considérons un fil rectiligne infini, de section πa^2, parcouru par un courant permanent I. Nous choisirons le système de coordonnées cylindriques pour calculer les composantes de $\vec{B}$, l'axe z étant confondu avec le fil. Dans ce repère, la densité de courant $\vec{J}$ a pour composantes :

$$J_r = J_\theta = 0$$
$$J_z = \frac{I}{\pi a^2}$$

Calcul du potentiel vecteur

Par symétrie, le potentiel vecteur en un point $M(r, \theta, z)$ doit être parallèle à l'axe Oz (le potentiel vecteur a la même symétrie que la densité de courant $\vec{J}$ comme le montre la relation 10.5) et son module ne peut dépendre que de r :

$$\vec{A} = A_z(r)\vec{u}_z$$

Pour déterminer la composante A_z, il suffit de résoudre l'équation :

$$\nabla^2 A_z = -\mu_0 J_z = -\mu_0 \frac{I}{\pi a^2}$$

Au chapitre 4, nous avons montré que le potentiel scalaire $V(\vec{r})$, créé par un fil uniformément chargé de densité λ à la distance r du fil, était de la forme :

$$V(\vec{r}) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln r + \text{Cte}$$

Par analogie, en identifiant λ/ε_0 à $\mu_0 I/\pi a^2$, nous obtenons pour la composante z du potentiel vecteur :

$$A_z(r) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln r + \text{Cte}$$

Calcul du champ magnétique

En coordonnées cylindriques $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, le rotationnel du potentiel vecteur est donné par le déterminant :

$$\vec{B} = \begin{vmatrix} \vec{u}_r & \vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 0 & A_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{1}{r} \vec{u}_\theta$$

Nous retrouvons là l'expression 9.15 calculée directement à partir de la définition du champ magnétique.

2 Champ magnétique créé par une boucle de courant : dipôle magnétique

Calcul du potentiel vecteur

Pour calculer le potentiel vecteur associé à une spire circulaire parcourue par un courant I, en un point M situé à une distance r du centre de la spire de rayon a (fig. 10.2), nous allons utiliser la relation 10.6 :

$$\vec{A}(\vec{r}_M) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \oint \frac{d\vec{l}}{|\vec{r}_P - \vec{r}_M|}$$

Pour effectuer ce calcul, il est commode de se placer en coordonnées sphériques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_\varphi)$. Dans ce système de coordonnées, nous constatons immédiatement que le potentiel vecteur en un point $M(r, \theta, 0)$ (le repère est choisi précisément pour que le point M soit de coordonnée $\varphi = 0$) doit être dans un plan perpendiculaire à Oz puisque l'élément de courant appartient au plan xOy. Par ailleurs, la symétrie de la distribution de courant impose à la composante radiale d'être nulle. En effet, le plan $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ passant par M étant un plan d'antisymétrie, le vecteur $\vec{A}$ au point M doit donc lui être perpendiculaire (du point de vue des symétries, cette situation est similaire à l'orientation du champ électrique en tout point appartenant au plan médian d'un dipôle électrique). Le potentiel vecteur $\vec{A}$ se réduit donc à la seule composante A_φ :

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint \frac{dl \cos\varphi}{r'} = \frac{\mu_0 I a}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos\varphi \, d\varphi}{r'}$$

dl étant un élément de circuit, centré au point $(r, \frac{\pi}{2}, \varphi)$, et distant de r' du point M.

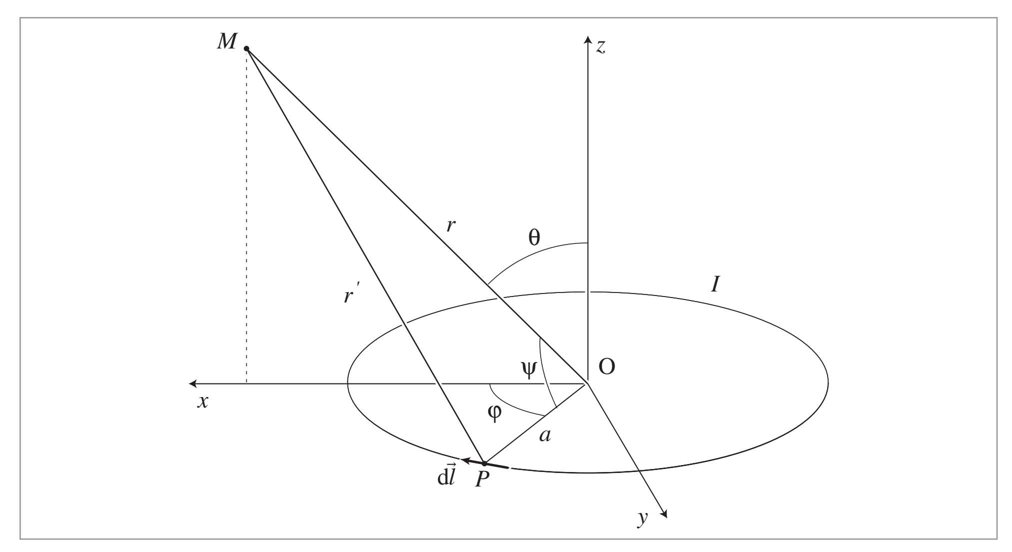


Fig. 10.2. Potentiel vecteur créé par une boucle de courant.

Plaçons-nous maintenant dans l'hypothèse $r \gg a$ et calculons l'expression approchée de $1/r'$. Nous avons :

$$r'^2 = r^2 + a^2 - 2ar\cos\psi$$

Au premier ordre en a/r, nous pouvons écrire :

$$\frac{r}{r'} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2 - \frac{2a}{r}\cos\psi}} \simeq 1 + \frac{a}{r}\cos\psi$$

En introduisant ce développement dans l'expression de A_φ, nous obtenons une expression approchée de la composante orthoradiale du potentiel vecteur :

$$\begin{aligned} A_\varphi &\simeq \frac{\mu_0 I a}{4\pi r}\int_0^{2\pi}\left(1 + \frac{a}{r}\cos\varphi\right)\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\mu_0 I a^2}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\cos\psi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \end{aligned}$$

Dans cette géométrie, on peut montrer que $\cos\psi = \sin\theta\cos\varphi$, ce qui nous permet d'écrire :

$$A_\varphi = \frac{\mu_0 I a^2 \sin\theta}{4\pi r^2}\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 I \pi a^2 \sin\theta}{4\pi r^2}$$

Il est traditionnel d'associer à la spire de surface orientée $\vec{S}$ parcourue par un courant I, le vecteur moment magnétique $\vec{M}$ défini par :

$$\vec{M} = I\vec{S}$$

Le potentiel vecteur s'exprime alors simplement en fonction de $\vec{M}$:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\vec{M} \wedge \vec{u}_r}{r^2}$$

Cette relation est générale et peut s'appliquer à tout circuit plan. Dans le cas d'un circuit non plan, il conviendra de le décomposer en circuits infinitésimaux puis de sommer vectoriellement toutes les contributions.

Calcul du champ magnétique

Comme précédemment, le champ magnétique $\vec{B}$ est donné par le rotationnel de $\vec{A}$. En coordonnées sphériques nous obtenons :

$$\vec{B} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\theta & r\sin\theta\,\vec{u}_\varphi \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} \\ 0 & 0 & -\dfrac{\mu_0}{4\pi}M\dfrac{\sin^2\theta}{r} \end{vmatrix}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{4\pi}\left(\frac{2\cos\theta}{r^3}\vec{u}_r + \frac{\sin\theta}{r^3}\vec{u}_\theta\right)$$

Les composantes $2\cos\theta/r^3\,\vec{u}_r$ et $\sin\theta/r^3\,\vec{u}_\theta$ se comportent exactement comme celles du champ électrique créé par un dipôle orienté suivant l'axe z (voir chapitre 5). Nous dirons qu'à une distance grande devant ses dimensions, une spire circulaire se comporte comme un « dipôle magnétique », l'équivalent en magnétostatique du dipôle en électrostatique (souvenons-nous toutefois qu'il n'y a pas de charges ponctuelles magnétiques isolées comme pourrait le laisser croire cette expression).

Remarquons que pour $\theta = 0$, nous déterminons ainsi le champ magnétique en tout point appartenant à l'axe de révolution de la spire. Ce champ magnétique est égal à :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 M}{2\pi r^3}\vec{u}_r = \frac{\mu_0 M}{2\pi z^3}\vec{u}_z = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3}\vec{u}_z$$

résultat qui est identique à celui qui serait obtenu en utilisant l'expression 9.16 dans laquelle nous aurions introduit la condition $a \ll z$.

3 Potentiel vecteur associé à un solénoïde

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que le champ magnétique créé par un solénoïde infini constitué de n spires par unité de longueur parcouru par un courant I est nul à l'extérieur du solénoïde et constant à l'intérieur. Il conviendra donc d'étudier le potentiel vecteur à l'extérieur et à l'intérieur du solénoïde et d'envisager les conditions de raccordement.

À l'extérieur au solénoïde

Pour calculer ce potentiel vecteur, commençons par évaluer en un point $\mathrm{M}(r, \theta, z)$ extérieur au solénoïde, la contribution au potentiel vecteur due à une longueur $\mathrm{d}z$ de solénoïde (fig. 10.3). Cet élément infinitésimal, centré en O′ contenant $n\,\mathrm{d}z$ spires peut être assimilé à moment magnétique $\mathrm{d}\vec{M} = nIS\,\mathrm{d}z\,\vec{u}_z$, $\vec{u}_z$ étant le vecteur unitaire dans la direction de l'axe du solénoïde orienté par rapport au sens du courant, conformément à la convention décrite au paragraphe 2. Chacun de ces éléments apporte au potentiel vecteur une contribution $\mathrm{d}\vec{A}$:

$$\mathrm{d}\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\mathrm{d}\vec{M} \wedge \vec{u}_\rho}{\rho^2}$$

ρ et $\vec{u}_\rho$ étant respectivement la distance et le vecteur unitaire dans la direction O′M. Le potentiel vecteur sera la somme de toutes ces contributions.

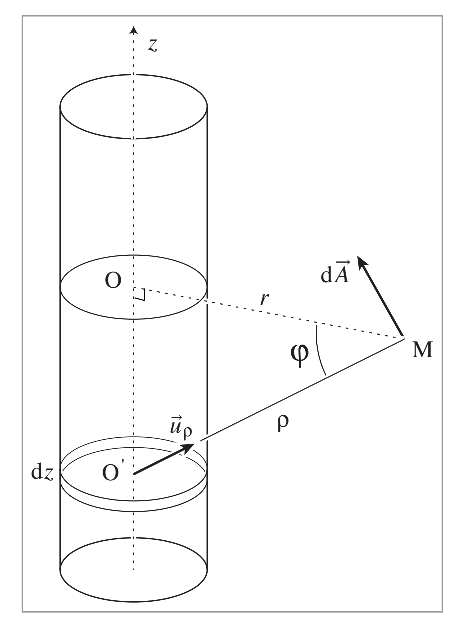


Fig. 10.3. Calcul du potentiel vecteur associé à un solénoïde.

L'analyse des symétries de la distribution des courants nous montre que seule la composante orthoradiale A_θ sera non nulle et qu'elle ne dépendra que de r. La contribution $\mathrm{d}A_\theta$ de l'élément $\mathrm{d}z$ est égale en vertu du principe de superposition à n fois celle de la composante A_θ calculée pour une seule spire :

$$\mathrm{d}A_\theta = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{nIS\cos\varphi\,\mathrm{d}z}{\rho^2} = \frac{\mu_0 nIS}{4\pi r}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

puisque $z = r\tan\varphi$, $\cos\varphi = \dfrac{r}{\rho}$ et $\mathrm{d}z = r\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\cos^2\varphi}$.

Pour obtenir la valeur totale de A_θ, il convient d'intégrer sur toutes les valeurs possibles de φ :

$$A_\theta(r) = \frac{\mu_0 nIS}{4\pi r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\mu_0 nIS}{2\pi r}$$

À la surface du solénoïde, $r = R$, le potentiel vecteur s'écrit alors : $\vec{A}(R) = \dfrac{\mu_0 nIR}{2}\vec{u}_\theta$.

Nous pouvons vérifier que ce potentiel vecteur conduit bien au champ magnétique attendu :

$$\vec{B} = \frac{1}{r}\begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 0 & r\dfrac{\mu_0 nIS}{2\pi r} & 0 \end{vmatrix} = 0$$

À l'intérieur du solénoïde

Calculons maintenant, le potentiel vecteur à l'intérieur du solénoïde. Le champ magnétique y est constant et égal à : $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$

Au paragraphe 10.1, nous avons vu que dans ce cas nous pouvions écrire un potentiel vecteur $\vec{A}$ sous la forme :

$$\vec{A} = \frac{1}{2}\vec{B} \wedge \vec{r} = \frac{1}{2}\mu_0 n I \vec{u}_z \wedge \vec{r} = \frac{1}{2}\mu_0 n I r \vec{u}_\theta$$

À la surface du solénoïde, $r = R$, et $\vec{A}(R) = \dfrac{\mu_0 n I R}{2}\vec{u}_\theta$.

En comparant les expressions du potentiel vecteur calculé de part et d'autre de la surface constituée par l'ensemble des spires, on peut constater que le potentiel vecteur est continu à la surface. Ce résultat est général, la continuité des composantes du potentiel vecteur étant le pendant en magnétostatique de la continuité du potentiel scalaire rencontrée en électrostatique.

Approfondissement

Circuit rectangulaire parcouru par un courant

Considérons une boucle rectangulaire de courant, de dimension (a, b) et calculons le potentiel vecteur associé à une telle distribution de courant. La largeur a et la longueur b peuvent définir respectivement les axes Ox et Oy d'un système de coordonnées cartésiennes. Dans ce repère, il n'y a pas, par construction, de courant dans la direction z. A_z est donc nul. Il y a des courants dans les directions x et y. La solution de l'équation 10.7 pour A_x est donc formellement identique à celle obtenue pour le potentiel électrostatique V créé par deux barres chargées de signe opposé. Puisque nous calculons le potentiel vecteur loin de la boucle, le potentiel scalaire équivalent est celui créé au point P par un dipôle constitué par deux charges λa et $-\lambda a$ distantes de b. Nous avons montré au chapitre 5 que ce potentiel scalaire a pour expression :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\vec{u}_r}{r^2} = \frac{\lambda ab}{4\pi\varepsilon_0}\frac{y}{r^3}$$

avec $\vec{P}$ le moment dipolaire égal à $\vec{P} = \lambda ab\vec{u}_y$.

Par analogie, en remplaçant $\frac{\lambda}{\varepsilon_0}$ par $\mu_0 I$ et en tenant compte de l'orientation du courant dans la barre, nous obtenons :

$$\vec{A}_x = -\frac{\mu_0 Iab}{4\pi}\frac{y}{r^3}\vec{u}_x$$

De la même façon nous obtenons l'expression de $\vec{A}_y$:

$$\vec{A}_y = \frac{\mu_0 Iab}{4\pi}\frac{x}{r^3}\vec{u}_y$$

Comme précédemment, nous pouvons introduire le moment magnétique dipolaire de la boucle M : $\vec{M} = Iab\vec{u}_z$.

Sous forme vectorielle, $\vec{A}$ s'écrit :

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y = \frac{\mu_0 Iab}{4\pi r^2}\left(-\frac{y}{r}\vec{u}_x + \frac{x}{r}\vec{u}_y\right)$$

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{\vec{M}\wedge\vec{u}_r}{r^2}$$

Nous retrouvons ainsi le résultat décrit en 10.3.2. Comme nous le voyons, cette expression du potentiel vecteur en fonction du moment magnétique associé est tout à fait générale et ne dépend pas de la forme de la boucle qui crée le champ magnétique.

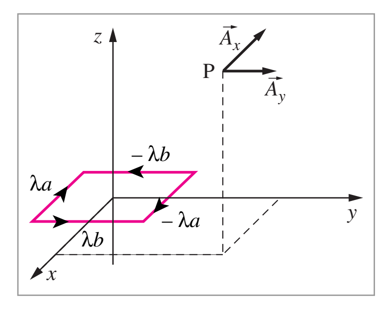


Fig. 10.4.

Exercices

1 **a.** Établir les expressions du champ magnétique $\vec{B}$ et du potentiel vecteur $\vec{A}$ créés, en tout point de l'espace, à l'intérieur et à l'extérieur d'un cylindre métallique de diamètre d, parcouru par un courant de densité uniforme dirigé selon l'axe du cylindre.

b. Tracer l'allure de $B(r)$ et $A(r)$ en supposant que $A = 0$ à la surface du conducteur, r étant la distance à l'axe de révolution du cylindre.

c. Discuter des continuités de $\vec{B}$ et $\vec{A}$ à la surface du conducteur.

d. Est-il facile de calculer le potentiel vecteur directement ? Si non, essayer d'expliciter l'origine des difficultés.

2 Établir les expressions du champ $\vec{B}$ et du potentiel vecteur $\vec{A}$ créé, en tout point de l'espace, par un cylindre infini, de diamètre d, d'axe Oz, parcouru par un courant surfacique de densité uniforme λ par unité de longueur, dirigé selon $\vec{u}_z$.

3 Établir les expressions du champ magnétique $\vec{B}$ et du potentiel vecteur $\vec{A}$ créé, en tout point de l'espace, par un cylindre infini, de diamètre d, d'axe Oz, parcouru par un courant surfacique de densité uniforme λ par unité de longueur, dirigé selon $\vec{u}_\varphi$.
Indice. *Identifier la distribution à un solénoïde de longueur infinie, ayant n spires jointives par unité de longueur et parcouru par un courant i.*

Chapitre 11

L'induction magnétique

Après avoir présenté succinctement les principaux résultats expérimentaux qui ont permis à Faraday de mettre en évidence les phénomènes d'induction, nous introduirons les notions de force électromotrice induite et de champ électrique, généralisation du champ électrostatique pour des charges en mouvement. Enfin, nous présenterons quelques aspects liés à l'utilisation pratique de ces phénomènes en introduisant la notion d'inductance et en décrivant les schémas de principe de quelques systèmes utilisant ces effets d'induction.

11.1 Mise en évidence expérimentale de l'induction

11.2 Force électromagnétique induite et courant induit

1 Force électromotrice et courant induit

2 Loi de Lenz

11.3 Interprétations de la loi de Faraday

11.4 Définition et propriétés locales du champ électrique

1 Définition du champ électrique $\vec{E}$

2 Propriétés locales du champ électrique $\vec{E}$

3 Équation de jauge

11.5 Notion d'inductance

1 Inductance mutuelle de deux circuits

2 Auto-inductance

3 Relation entre inductance mutuelle et auto-inductance - Coefficient de couplage entre des circuits

4 Exemples de coefficients d'inductance

11.6 Exemples d'applications de phénomènes d'induction

1 Principe du générateur de courant alternatif

2 Principe du moteur électrique

3 Principe d'un transformateur

Mots-clés

- **Loi de Faraday**
- **Force électromatrice**
- **Inductance mutuelle**
- **Auto-inductance**

Les expériences d'Oerstedt et d'Ampère ayant montré qu'un courant électrique crée un champ magnétique, la tentation fut grande au XIXe siècle d'essayer de savoir si à son tour un champ magnétique pouvait créer un courant électrique. De nombreuses expériences furent réalisées, sans grand succès. Il fallut attendre les travaux de Faraday publiés en 1831 (dans les premières séries de *Recherches expérimentales*, Royal Society) pour comprendre que ce n'était pas le champ magnétique lui-même qui créait un courant dans un circuit mais la variation du flux de ce champ à travers ce circuit. Ce résultat essentiel conduisit alors au développement rapide des machines électriques, pouvant convertir de l'énergie mécanique en énergie électrique (générateurs) et vice versa (moteurs électriques).

Un peu d'histoire

Faraday (1791-1867)

Apprenti relieur, auditeur aux cours de la Royal Institution, première publication de chimie en 1817, accueilli par H. Davy dans son laboratoire en 1819, première publication de physique en 1821, successeur de Davy en 1827, Faraday est l'un des plus brillants scientifiques de son temps.
L'un de ses premiers travaux (1821) est l'étude des mouvements relatifs d'un barreau magnétique et de courants électriques, expériences qui conduisent à la réalisation des moteurs électromagnétiques Une autre découverte fondamentale faite par Faraday est la mise en évidence et l'explication des phénomènes d'induction, Après plusieurs années d'insuccès, Faraday montre en 1831 l'existence d'un courant induit dans un circuit lors de l'ouverture et de la fermeture d'un circuit voisin, résultat qu'il interprète aussitôt comme lié aux variations des conditions magnétiques du circuit induit. Il faut attendre 1852 pour qu'il livre son explication la plus complète de l'induction : « Quand un fil se meut directement à travers des lignes de force… la quantité d'électricité passant dans le circuit est proportionnelle au nombre de lignes coupées. »

11.1. Mise en évidence expérimentale de l'induction

Expérience 1 : circuit déformable dans un champ magnétique constant

Considérons le circuit électrique plan constitué de deux rails conducteurs et d'un barreau métallique pouvant glisser sur ces rails, le contact électrique étant maintenu entre le barreau et les rails. Un ampèremètre permet de mesurer à chaque instant le courant dans ce circuit. Plaçons ce dispositif dans une région dans laquelle existe un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme, de direction perpendiculaire au plan contenant le circuit (fig. 11.1).

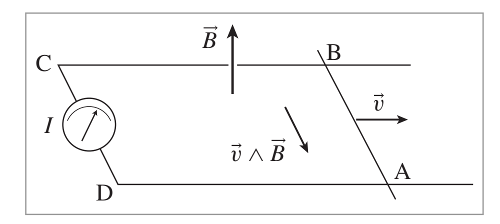


Fig. 11.1. Circuit déformable dans un champ magnétique uniforme constant.

Lorsque le barreau est fixe, l'ampèremètre n'indique aucun courant dans le circuit. En revanche, si le barreau est mis en mouvement, il apparaît instantanément un courant et ce tant que le barreau se déplace. De plus, si le sens de déplacement du barreau change, le sens du courant électrique observé change également.

Expérience 2 – circuit indéformable fixe, source de champ magnétique appliqué fixe mais champ magnétique variable

Considérons maintenant un circuit électrique indéformable placé au voisinage d'une bobine fixe dans laquelle on peut faire varier l'intensité du courant (fig. 11.2). Si le courant dans la bobine est maintenu constant, ce qui correspond à un champ magnétique constant, aucun courant ne parcourt le circuit. En revanche, un courant apparaît dans le circuit dès que l'on fait varier le courant dans la bobine. Son sens change suivant qu'on augmente ou diminue le courant dans la bobine. Il s'agit là d'une des toutes premières expériences couronnées de succès entreprises par Faraday. Dans ce type d'expérience, il observait des courants induits dans un circuit lorsqu'il ouvrait ou fermait un circuit voisin.

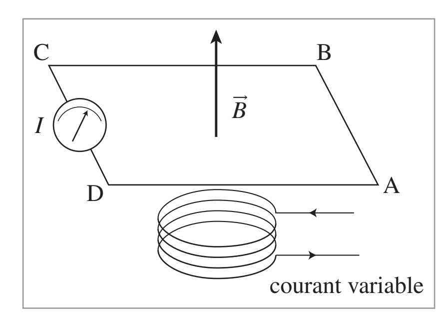


Fig. 11.2. Circuit indéformable dans un champ magnétique uniforme variant au cours du temps.

Expérience 3 : circuit indéformable mobile dans un champ magnétique non uniforme

Une autre expérience consiste à déplacer un circuit indéformable dans un champ magnétique non uniforme créé par une bobine fixe (fig. 11.3). Si le circuit est fixe, aucun courant dans le circuit n'est détecté par l'ampèremètre. En revanche, dès que le circuit se met en mouvement, un courant apparaît. Comme dans l'expérience 1, le sens du courant mesuré dans le circuit change avec le sens de déplacement du circuit.

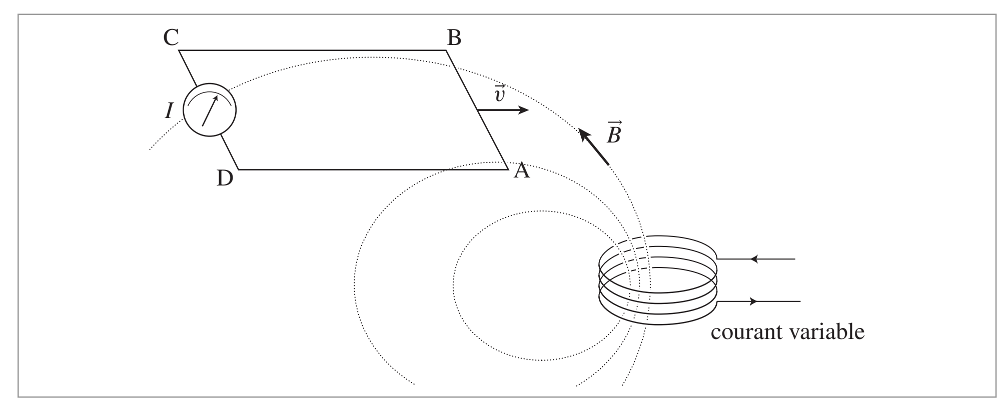


Fig. 11.3. Circuit indéformable mobile dans un champ magnétique variable.

Comment peut-on comprendre qualitativement ces différents phénomènes ? Dans l'expérience 1, l'apparition du courant dans un circuit soumis à un champ constant est due à la déformation du circuit ; dans l'expérience 2, seule la variation d'intensité du champ magnétique crée un courant dans le circuit indéformable ; enfin, dans l'expérience 3, alors que le circuit est indéformable et le champ constant, l'apparition du courant est liée à l'inhomogénéité du champ. Ces trois expériences, réalisées par Faraday, lui suggérèrent que le « moteur » des électrons dans le circuit n'était pas à chercher dans les variations de la forme du circuit ou du champ magnétique, mais dans celles d'une grandeur qui lie ces deux paramètres : le flux du champ magnétique à travers le circuit.

Un peu d´histoire

L'induction

À partir des expériences qu'il réalisa durant l'automne 1831, Faraday imagina le phénomène d'induction comme étant lié au fait que des lignes de champ traversent les conducteurs du circuit dans lequel passe le courant induit ; il reconnut que ces phénomènes obéissent « à une loi très simple, quoique assez difficile à exprimer : ils dépendent de la façon dont le conducteur coupe les courbes magnétiques [...] j'entends les lignes de force qui seraient tracées par la limaille de fer. » (d'après R. Taton, *La science contemporaine*, PUF).

11.2. Force électromagnétique induite et courant induit

1 Force électromotrice et courant induit

Pour décrire commodément ses expériences, Faraday introduisit une grandeur $\mathcal{E}$, qu'il appela force électro-motrice (f.e.m.) ayant la dimension d'une différence de potentiel. Cette « force » est associée au courant induit I par la relation $\mathcal{E} = RI$, où R est la résistance du circuit.

En analysant le sens et l'intensité du courant induit dans le circuit, toutes ces expériences peuvent être comprises en liant la force électromotrice $\mathcal{E}$ à la variation instantanée du flux magnétique Φ à travers toute surface orientée s'appuyant sur le circuit. On obtient la relation fondamentale de l'induction :

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{11.1}$$

Un circuit électrique est orienté par le sens du courant que l'on considère conventionnellement comme positif ; la surface s'appuyant sur ce circuit est alors orientée suivant la règle du « bonhomme d'Ampère ». Suivant cette règle, l'orientation de la surface est donnée par la direction indiquée par « le bras gauche d'un bonhomme qui regarde le centre du circuit tandis que le courant conventionnel lui rentre par les pieds et lui sort par la tête ».

Cette équation (11.1) rend compte du fait essentiel découvert par Faraday : il ne peut y avoir de force électromotrice induite et de courant induit apparaissant dans le circuit que s'il y a, d'une manière ou d'une autre, variation de flux magnétique dans le circuit. Toutefois, bien que toutes les situations expérimentales étudiées par Faraday puissent être décrites par la même relation 11.1, soulignons dès à présent que les mécanismes responsables de ces courants induits sont différents et peuvent paraître inconciliables. Nous reviendrons sur cette question au paragraphe 11.3.

Notons de plus que les valeurs $\mathcal{E}$ et I sont algébriques. En effet, considérons par exemple l'expérience 1 présentée au précédent paragraphe ; comme il est indiqué sur la figure 11.1, le courant positif conventionnel parcourt le circuit dans le sens ABCD et la surface S s'appuyant sur ce circuit est alors orientée dans le sens des $z > 0$. Si le barreau AB se déplace selon les $y > 0$, Φ augmente, $\mathcal{E}$ et I sont alors négatifs en vertu de la relation 11.1. Ceci qui veut dire que le courant I circule réellement dans le sens opposé au sens ABCD. À l'inverse, si le barreau AB se déplace selon les y négatifs, Φ diminue, $\mathcal{E}$ et I sont positifs et le courant circule alors réellement dans le sens ABCD.

Approfondissement

Ces résultats sont bien entendu indépendants du sens conventionnel du courant. Par exemple, si nous avions choisi de faire circuler le courant dans le sens DCBA, la surface S aurait été orientée dans le sens des $z < 0$. Dans ce cas, le déplacement de AB vers les $y > 0$ conduit à une diminution du flux (il augmente en valeur absolue mais diminue en valeur algébrique) et $\mathcal{E}$ et I sont alors positifs : le courant réel parcourt donc le circuit dans le sens choisi pour la circulation DCBA. Nous retrouvons là le résultat physique obtenu lorsque nous avons choisi le sens ABCD comme sens de circulation.

2 Loi de Lenz

Examinons maintenant un autre aspect associé à ce courant induit. En vertu des lois générales des champs magnétiques créés par des courants électriques, le courant induit va à son tour créer un champ magnétique induit. Quelle est son orientation ? Revenons à l'expérience 1. Lorsque le barreau AB se déplace selon les $y > 0$, le courant parcourt le circuit dans le sens DCBA, le champ magnétique induit sera donc orienté suivant les $z < 0$. Si nous retenons le sens ABCD comme sens conventionnel de circulation, le flux magnétique associé au champ créé par la bobine est positif et augmente, en revanche celui associé au champ magnétique induit est négatif. Ainsi, la variation du flux du champ magnétique appliqué va se traduire par l'apparition d'un champ magnétique induit dont le flux va compenser la variation du flux du champ appliqué. Nous arrivons à la même conclusion si la barre AB se déplace selon les $y < 0$. Dans ce cas, le champ induit est orienté suivant les $z > 0$, son flux positif augmente pour s'opposer à la diminution de flux associé au champ $\vec{B}$. Des conclusions analogues pourraient être faites pour chacune des expériences présentées au paragraphe 11.1 ; dans tous les cas, le courant induit est tel que le flux du champ magnétique induit tend

à s'opposer à la variation de flux qui lui a donné naissance. On dit que « le courant induit créé un champ magnétique dont le flux s'oppose à la variation du flux du champ magnétique appliqué $\vec{B}$ ». Ce résultat général est connu sous le nom de « loi de Lenz ».

11.3. Interprétations de la loi de Faraday

Avant de rentrer dans les détails de l'analyse des résultats expérimentaux de Faraday et de sa loi de variation de flux, il convient de rappeler l'expression de la force subie par un électron de charge électrique $-e$ soumis à un champ électromagnétique :

$$\vec{F} = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

Dans cette description de la force électromagnétique, les champs électrique $\vec{E}$ et magnétique $\vec{B}$ sont définis comme les champs responsables des contributions respectivement indépendante et dépendante de la vitesse de l'électron (cette formulation a été proposée par le physicien hollandais Hendrik Antoon Lorentz en 1892). Il est indispensable de garder en mémoire cette distinction pour comprendre les analyses proposées.

Analyse de l'expérience 1 : circuit déformable dans un champ magnétique constant

Dans l'expérience 1, lorsque l'on déplace le barreau à la vitesse $\vec{v}$, chaque électron qu'il contient est soumis à la force :

$$\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B} \tag{11.2}$$

Les autres électrons ne subissent pas cette force puisqu'ils se trouvent dans des éléments fixes du circuit et qu'aucun champ électrique n'est appliqué. Cette force magnétique va provoquer le déplacement de l'électron le long de AB. C'est ce mouvement des électrons dans la barre qui va induire un courant électrique dans tout le circuit. En effet, ces électrons en se déplaçant vont « pousser » à leur tour par répulsion électrique les autres électrons et ainsi induire le courant. Notons que dans l'expression 11.1, nous n'avons pas tenu compte de la vitesse de l'électron le long du fil pour ne retenir que la vitesse d'entraînement associée au mouvement du barreau. Cette vitesse crée également une force magnétique perpendiculaire au fil mais elle ne nous intéresse pas pour le moment. Vous pourrez vous convaincre qu'il s'agit d'une force de « freinage », opposée au déplacement du barreau.

Calculons la circulation de cette force magnétique de long du circuit ABCD. La force magnétique étant non nulle uniquement sur le segment AB, de longueur L, nous obtenons :

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = -e \oint \vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = evLB \tag{11.3}$$

Introduisons maintenant le vecteur surface $\vec{S}$, orienté dans la direction imposée par le sens de la circulation (en utilisant la régle du bonhomme d'Ampère et le sens de circulation ABCD comme sens conventionnel), ayant pour module la surface instantanée du circuit.

Nous obtenons immédiatement que :

$$vLB = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{S} \cdot \vec{B}) = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{11.4}$$

Φ étant par définition le flux du champ magnétique $\vec{B}$ à travers la surface orientée du circuit. En comparant les expressions 11.3 et 11.4, nous obtenons :

$$\frac{1}{-e}\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

Par définition l'expression $\frac{1}{-e}\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$ correspond à la force électromotrice (f.e.m.) $\mathcal{E}$ du circuit :

$$\mathcal{E} = \frac{1}{-e}\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$$

Analyse de l'expérience 2 : circuit indéformable fixe, dans un champ magnétique variable

Les forces magnétiques discutées au paragraphe précédent ne peuvent pas être invoquées pour interpréter les résultats de l'expérience 2 dans laquelle le courant apparaît dès que l'intensité du champ magnétique varie. En effet, ici il n'y a pas de déplacement relatif des éléments du circuit et de la bobine. Il faut donc voir, dans l'observation d'un courant induit, un résultat d'une nature tout à fait nouvelle et lui accorder une valeur informative particulière. Nous verrons que c'est à ce titre que Maxwell lui a accordé un statut de postulat indépendant. Ne pouvant plus avoir recours aux forces magnétiques décrites par Lorentz pour expliquer l'existence d'un courant dans le circuit lorsque le champ magnétique appliqué varie, nous sommes donc obligés de conclure à l'existence d'un champ électrique responsable de ce mouvement. Ce champ électrique $\vec{E}_\mathrm{i}$, qu'on appellera désormais le « champ d'induction », vérifie par définition du courant et de la f.e.m, la relation :

$$\oint \vec{E}_\mathrm{i} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} \tag{11.5}$$

Ce résultat impose immédiatement deux commentaires importants. Tout d'abord, le champ électrique d'induction présente une circulation non nulle sur une boucle fermée. Il diffère donc radicalement du champ électrostatique pour lequel cette circulation était nécessairement nulle. En corollaire, ce résultat nous indique, qu'à la différence du champ électrostatique, le champ électrique d'induction ne dérive pas d'un potentiel électrique scalaire et que son rotationnel est non nul. Calculons ce rotationnel. En appliquant le théorème de Stockes et en utilisant la définition du flux, nous pouvons réécrire l'expression 11.5 :

$$\iint_\mathrm{S} (\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_\mathrm{i}) \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = -\iint_\mathrm{S} \frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} \tag{11.6}$$

S étant la surface orientée s'appuyant sur le circuit indéformable fixe C. Cette relation devant être vérifiée quel que soit le contour C, nous obtenons, par identification, l'égalité des deux intégrants :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_\mathrm{i} = -\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t} \tag{11.7}$$

Cette équation, obtenue par Maxwell, rend compte au niveau local du résultat expérimental de Faraday (équation appelée parfois équation de Maxwell-Faraday).

Analyse de l'expérience 3 : circuit indéformable mobile dans un champ magnétique non uniforme

Dans les explications que nous avons données aux deux paragraphes précédents pour expliquer la règle du flux, il est apparu indispensable de distinguer le cas correspondant à un circuit déformable de celui correspondant à une variation du champ magnétique. L'analyse de l'expérience 3 va relativiser cette distinction.

Dans l'expérience 3, seuls les électrons des segments AB et CD, subissent des forces magnétiques orientées le long du circuit, elles seules contribueront à la force électromotrice $\mathcal{E}$ du système. Comme dans l'expérience 1, nous allons évaluer la circulation de ces forces le long du circuit parcouru dans le sens ABCD pour calculer $\mathcal{E}$. Si L est la longueur des segments AB et CD, nous obtenons ainsi :

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = -evL(B_1 - B_2) \qquad (11.8)$$

Introduisons maintenant la variation de flux magnétique à travers le circuit observée entre les instants t et $t + dt$. L'augmentation du flux due au déplacement du segment AB est égale à $B_2 vLdt$; à l'inverse le déplacement du segment CD va provoquer une diminution du flux égale en valeur algébrique à $-B_1 vLdt$. Ainsi la variation instantanée de flux magnétique est égale à :

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = (B_2 - B_1)vL \qquad (11.9)$$

En comparant les expressions 11.8 et 11.9, nous constatons que nous pouvons écrire comme au paragraphe :

$$\left(\frac{1}{-e}\right) \oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

On peut se convaincre facilement que nous obtiendrions le même résultat en maintenant le circuit fixe et en déplaçant la source de champ à la vitesse $-\vec{v}$ (pas d'effet relativiste tant que $\vec{v}$ est petit devant la vitesse de la lumière).

Changeons maintenant de regard sur cette expérience, plus exactement changeons de référentiel. Dans la description précédente nous étions dans le référentiel fixe de la bobine, le champ magnétique en chaque point était constant. Plaçons-nous maintenant dans le référentiel du circuit. Dans ce référentiel, le circuit est fixe par définition, le champ magnétique apparaît en revanche comme variable. Dans un tel référentiel, un observateur ne pourra pas invoquer les forces de Lorentz pour expliquer le courant qu'il observe, il sera obligé comme pour l'analyse de l'expérience 2, de faire intervenir un champ électrique d'induction. Sans rentrer dans plus de détails, cet exemple doit nous permettre de garder en mémoire que les champs électrique et magnétique ne sont que les différents aspects d'une même entité appelée « champ électromagnétique ». Suivant le référentiel, les rôles joués par les champs électrique et magnétique peuvent permuter. Toutefois, quelle que soit la situation physique rencontrée, la relation fondamentale de l'induction donnée par l'expression 11.1 reste valable.

11.4. Définition et propriétés locales du champ électrique

1 Définition du champ électrique $\vec{E}$

Lorsqu'il reformule l'ensemble des équations permettant de décrire l'électromagnétisme, Maxwell définit le champ électrique $\vec{E}$ comme le champ qui exerce, sur une charge q, une force indépendante de la vitesse de la charge. Bien entendu, les champs électrostatiques $\vec{E}_s$ étudiés au chapitre 2 rendent compte de cette propriété, toutefois les résultats obtenus par Faraday obligent Maxwell à y adjoindre le champ électrique d'induction. Le champ électrique $\vec{E}$ est donc défini en toute généralité par :

$$\vec{E} = \vec{E}_s + \vec{E}_i$$

Ni les contemporains de Laplace ni ceux de Maxwell ne connurent la théorie de la relativité qui naquit au début du XXe siècle. Les analyses proposées pour les expériences 1 et 2 semblaient incompatibles. Pour contourner cette difficulté, Maxwell élabora le concept de champ électrique, extension au domaine des charges en mouvement du concept de champ électrostatique limité au cas des charges fixes.

2 Propriétés locales du champ électrique $\vec{E}$

Dans le chapitre 3, nous avions exploré les propriétés locales des champs électrostatiques. Que pouvons-nous dire des propriétés équivalentes associées au champ électrique ?

Divergence du champ électrique

Nous avons montré au chapitre 3 que le champ électrostatique $\vec{E}_s$ vérifie la relation locale $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}_s = \rho/\varepsilon_0$. En fait on peut montrer que cette relation peut s'appliquer également aux charges en mouvement. Nous pourrons donc écrire en toute généralité :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Rotationnel du champ électrique – relation de Maxwell-Faraday

Nous pouvons obtenir très simplement l'expression du rotationnel du champ électrique :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = \vec{\nabla} \wedge (\vec{E}_s + \vec{E}_i) = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_s + \vec{\nabla} \wedge \vec{E}_i$$

Le champ électrostatique et le champ électrique d'induction vérifiant respectivement les relations 3.5 et 11.7, $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_s = 0$ et $\vec{\nabla} \wedge \vec{E}_i = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$, nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (11.10)$$

Cette équation constitue l'une des équations fondamentales de l'électromagnétisme connue sous le nom de relation de Maxwell-Faraday. Le champ $\vec{B}$ étant une fonction de l'espace et du temps, c'est la dérivée partielle par rapport au temps qui intervient dans la relation de Maxwell-Faraday.

3 Équation de jauge

L'étude des champs électrostatiques nous a montré que ces champs dérivent d'un potentiel scalaire V :

$$\vec{E}_s = -\vec{\nabla} V$$

Que pouvons nous écrire d'équivalent en ce qui concerne le champ électrique $\vec{E}$? En introduisant la relation $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ dans l'équation 11.10, nous pouvons écrire :

$$\vec{\nabla} \wedge \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \vec{0}$$

Cette équation nous permet de conclure que le vecteur $\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ est nécessairement le gradient d'une certaine fonction que l'on notera de façon formelle V. On écrira donc en toute généralité :

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad (11.11)$$

Notons que dans cette expression, le potentiel V n'est pas nécessairement égal au potentiel de Coulomb. En particulier, il ne faut pas oublier que le champ électrique $\vec{E}$ étant une grandeur physique doit, à ce titre, être invariant lors d'un changement de jauge, c'est-à-dire le remplacement du couple $(V, \vec{A})$ par un couple $(V', \vec{A}')$ vérifiant également la relation 11.11. Ceci impose au potentiel scalaire V et au potentiel vecteur $\vec{A}$ d'être liés. En effet, si on modifie le potentiel vecteur par le changement de jauge $\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\Psi$, il faut modifier le potentiel scalaire V en conséquence et écrire : $V' = V - \frac{\partial \Psi}{\partial t}$.

11.5. Notion d'inductance

Du point de vue plus pratique de l'électrotechnique, l'étude de circuits électriques exploitant des effets d'induction ne nécessite pas une description de ces phénomènes en termes de champs électrique et magnétique ; il est en général plus simple d'introduire la notion d'inductance qui permet de les décrire uniquement à l'aide de forces électromotrices et de courants. Cette notion s'avère en particulier très commode dès qu'un ou plusieurs circuits sont parcourus par des courants variables, notamment dans le cas de circuits électriques contenant des boucles (spires, solénoïdes...). Nous supposerons toutefois que ces variations sont suffisamment lentes pour que nous puissions utiliser les résultats obtenus pour calculer les champs magnétiques associés à des courants continus. Par ailleurs, nous verrons au chapitre 13 que cette notion est essentielle dès qu'on étudie les énergies associées aux phénomènes magnétiques.

1 Inductance mutuelle de deux circuits

Considérons deux circuits électriques, C_1 et C_2, dont les positions sont fixes l'une par rapport à l'autre (fig. 11.4). Si nous faisons passer un courant variable I dans le circuit C_1, ce courant va créer dans tout l'espace un champ magnétique variable B_1. Le flux de ce champ magnétique à travers toute surface orientée s'appuyant sur le circuit C_2 sera également variable. En vertu de la loi de Faraday, il y aura donc création d'une force électromotrice et d'un courant induit dans le circuit C_2.

Plus quantitativement, nous pouvons exprimer le champ $\vec{B}_1(\vec{r}_2)$ créé par le courant I_1 circulant dans la boucle C_1 en tout point $\vec{r}_2$ de l'espace :

$$\vec{B}_1(\vec{r}_2) = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_1(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \vec{\nabla} \wedge \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}\,\vec{l}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}$$

$\mathrm{d}\,\vec{l}_1$ étant un vecteur infinitésimal de déplacement le long de la boucle C_1 centrée en $\vec{r}_1$. Le flux Φ_{21} de ce champ magnétique $\vec{B}_1$ à travers une surface orientée s'appuyant sur le circuit C_2 s'écrit par définition :

$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} \vec{B}_1(\vec{r}_2) \cdot \mathrm{d}\,\vec{S}(r_2)$$

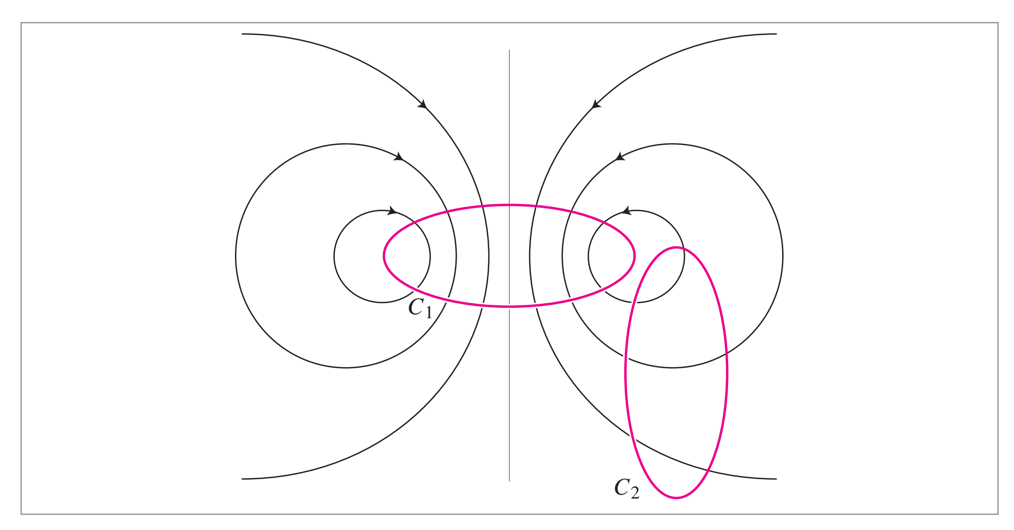


Fig. 11.4. Inductance mutuelle de deux circuits.

En appliquant le théorème de Stockes et en introduisant la relation $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$, l'expression du flux Φ_{21} peut s'écrire :

$$\Phi_{21} = \iint_{S_2} (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}_1) \cdot \mathrm{d}\,\vec{S}_2 = \oint_{C_2} \vec{A}_1 \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}_2$$

$$= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \oint_{C_2} \frac{\mathrm{d}\,\vec{l}_1}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}_2$$

Par définition, la force électromotrice $\mathcal{E}_{21}$ qui apparaît dans le circuit C_2 lorsque le courant I varie est égale à la variation temporelle de ce flux :

$$\mathcal{E}_{21} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathcal{E}_{21} = -\left(\frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_2} \oint_{C_1} \frac{\mathrm{d}\,\vec{l}_1 \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}\right) \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = -\mathrm{M}_{21} \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Considérons l'opération symétrique : le courant variable I passant maintenant dans le circuit 2. En faisant le même type de raisonnement que celui que nous venons de faire,

nous obtiendrions :

$$\mathcal{E}_{12} = -\left(\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}\right)\frac{dI}{dt} = -M_{12}\frac{dI}{dt}$$

L'intégrale purement géométrique :

$$\oint_1\oint_2\frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$$

étant symétrique par rapport aux variables des circuits C_1 et C_2, ces forces électromotrices $\mathcal{E}_{21}$ et $\mathcal{E}_{12}$ sont, dans un cas comme dans l'autre, proportionnelles au même facteur géométrique prenant en compte la forme et la position relative des deux circuits :

$$M_{21} = M_{21} = \frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{C_1}\oint_{C_2}\frac{d\vec{l}_1\cdot d\vec{l}_2}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} \quad (11.12)$$

Ce coefficient est appelé coefficient d'inductance mutuelle des circuits C_1 et C_2. Dans le système MKSA, ce coefficient se mesure en henry (weber/ampère). Il peut être positif ou négatif selon les sens retenus pour calculer les circulations. La relation 11.12 porte le nom de formule de Neumann.

Un peu d'histoire

Le potentiel de Neumann

En 1845, partant de l'ensemble des travaux d'Ampère, Neumann introduisit le « potentiel mutuel » V' entre deux circuits qu'il définit comme le travail mécanique qu'il faut fournir contre les forces électrodynamiques pour amener les deux circuits de l'infini à leur position finale sans changement de forme ni d'intensité :

$$V = -II'\iint\frac{dl\,dl'}{r_{ii'}}$$

2 Auto-inductance

Considérons maintenant un seul circuit parcouru par un courant variable I. Ce courant va créer un champ magnétique dont le flux à travers toute surface orientée s'appuyant sur le circuit sera également variable. Le circuit est donc traversé par le flux variable d'un champ qu'il a lui-même créé. La loi de Faraday étant tout à fait générale, cette variation de flux va induire une force électromotrice d'induction dans le circuit.

La relation de Biot et Savart indique que le champ magnétique en tout point de l'espace est proportionnel à I, tout comme le flux Φ de ce champ à travers le circuit. Nous pouvons donc écrire :

$$\Phi = LI$$

La force électromotrice induite est donc égale par définition à :

$$\mathcal{E} = -L\frac{dI}{dt} \quad (11.13)$$

Le coefficient L est appelé coefficient d'auto-inductance (plus généralement inductance) du circuit. Comme le coefficient d'inductance mutuelle, il est mesuré en henry. Soulignons toutefois que le coefficient L est toujours positif.

Remarquons enfin que nous ne pouvons pas utiliser la relation 11.12 pour calculer le coefficient d'auto-inductance. En effet, les deux intégrales curvilignes s'effectueraient alors sur le même circuit, le dénominateur $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ prendrait une valeur nulle lorsque les éléments infinitésimaux $\mathrm{d}\,\vec{l}_1$ et $\mathrm{d}\,\vec{l}_2$ seraient confondus, L deviendrait alors infini (cela est dû au fait que le champ crée par un fil infini varie en r^{-1}, ce qui le rend divergent si on néglige la diamètre du fil ; or c'est précisément l'approximation que l'on fait pour établir la relation $\vec{A} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int \frac{\mathrm{d}\,\vec{l}}{r}$).

3 Relation entre inductance mutuelle et auto-inductance - Coefficient de couplage entre des circuits

Nous allons établir pour finir une relation qui décrit l'intensité du couplage entre circuits parcourus par des courants variables. Reprenons le système constitué par les deux circuits considérés précédemment et faisons le bilan des différents flux :

$$\begin{aligned}
\Phi_{11} &= L_1 I_1 \\
\Phi_{22} &= L_2 I_2 \\
\Phi_{12} &= M_{12} I_1 = \frac{M_{12}}{L_1}\Phi_{11} = k_1 \Phi_{11} \\
\Phi_{21} &= M_{21} I_2 = \frac{M_{21}}{L_2}\Phi_{22} = k_2 \Phi_{22}
\end{aligned}$$

À partir de ces quatre équations, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
M_{21} &= k_2 L_2 \\
M_{12} &= k_1 L_1
\end{aligned}$$

En vertu du principe de réciprocité qui veut que $M_{12} = M_{21}$, nous obtenons la relation :

$$(M_{12})^2 = k_1 k_2 L_1 L_2 = K L_1 L_2$$

Cette relation est générale, le coefficient K, appelé coefficient de couplage, caractérise l'efficacité du couplage par induction entre les deux circuits. Ce coefficient de couplage varie de 0 à ± 1. Par exemple, nous dirons que le couplage est total lorsque $\Phi_{12} = \Phi_{11}$ et $\Phi_{21} = \Phi_{22}$, K est alors égal à 1.

4 Exemples de coefficients d'inductance

Inductance mutuelle de deux spires

Soient deux spires coaxiales C_1 et C_2, de rayons r_1 et r_2 tels que $r_2 \ll r_1$, situées dans le même plan (fig. 11.5). Les sens conventionnels associés à l'orientation des surfaces s'appuyant sur les boucles sont indiqués par les flèches.

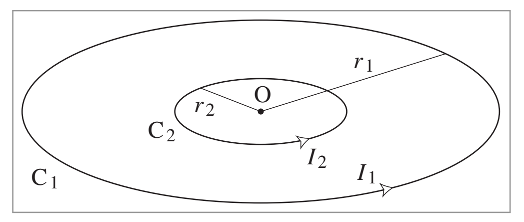


Fig. 11.5. Calcul de l'inductance mutuelle de deux spires.

Supposons que la spire C_1 soit parcourue par un courant variable I_1.

Le rayon de la spire C_2 étant très petit devant celui de la spire C_1, on peut supposer que le champ magnétique traversant la spire 2 est uniforme et égal à celui créé par le courant I_1 au centre de la spire 1. Ce champ magnétique vaut :

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2r_1}$$

Le flux de ce champ à travers toute surface orientée s'appuyant sur C_2 est égal à :

$$\Phi_{12} = \pi r_2^2 \frac{\mu_0 I_1}{2r_1}$$

Nous pouvons alors en déduire le coefficient d'inductance mutuelle M_{12} :

$$M_{12} = \frac{\mu_0 r_2^2}{2r_1}$$

Remarquons qu'en vertu du principe de réciprocité, $M_{12} = M_{21}$, le flux d'un champ magnétique créé par un courant dans la petite spire à travers la surface de la grande spire peut être évalué simplement :

$$\Phi_{21} = M_{21} I_2 = I_2 \frac{\mu_0 r_2^2}{2r_1}$$

Le calcul direct est un peu plus compliqué, le champ magnétique créé par la petite spire étant différent en chaque point de la surface bordée par la grande spire ; on peut toutefois arriver au résultat en écrivant que la somme du flux que la petite spire envoie dans la grande et du flux extérieur est nul. Il suffit donc de calculer ce deuxième terme, ce qui est facile si on applique l'approximation dipolaire.

En utilisant le principe de superposition appliqué aux champs magnétiques, ce calcul se généralise facilement au cas de deux bobines contenant respectivement N_1 et N_2 spires jointives. Le coefficient d'inductance mutuelle vaut alors :

$$M_{12} = \frac{\mu_0 \pi N_1 N_2 r_2^2}{2r_1}$$

Coefficient d'auto-inductance d'un solénoïde

Considérons un solénoïde de longueur l constitue de n spires de rayon R par unité de longueur. Nous pouvons calculer, dans l'approximation d'un solénoïde infini ($R \ll l$), le champ à l'intérieur du solénoïde :

$$B = \mu_0 n I$$

Le flux magnétique qui traverse chaque spire (orientée par le sens du courant) vaut $\mu_0 n I \pi r^2$. En vertu du principe de superposition, le flux total à travers le solénoïde, soit $N = nl$ spires, est égal à :

$$\Phi = \mu_0 n^2 I \pi r^2 l$$

Nous pouvons en déduire le coefficient d'auto-induction du solénoïde L :

$$L = \mu_0 n^2 l \pi r^2 = \mu_0 l \pi (nr)^2 = \frac{\mu_0}{4\pi l}\mathcal{L}^2$$

où $\mathcal{L} = 2\pi r n l$ est la longueur de fil constituant le solénoïde.

11.6. Exemples d'applications de phénomènes d'induction

Les phénomènes d'induction sont très largement utilisés pour convertir de l'énergie électrique en énergie mécanique, et vice-versa. Nous ne donnerons ici qu'une série d'exemples représentatifs de ce type d'utilisation, une présentation plus détaillée de ces dispositifs sera faite au chapitre 14.

1 Principe du générateur de courant alternatif

De façon schématique, un générateur de courant alternatif peut être représenté par une spire circulaire mobile autour d'un de ses diamètres, l'ensemble étant soumis à un champ magnétique $\vec{B}$ constant (fig. 11.6). L'axe de rotation sera défini comme l'axe Ox, le champ magnétique étant orienté suivant Oz.

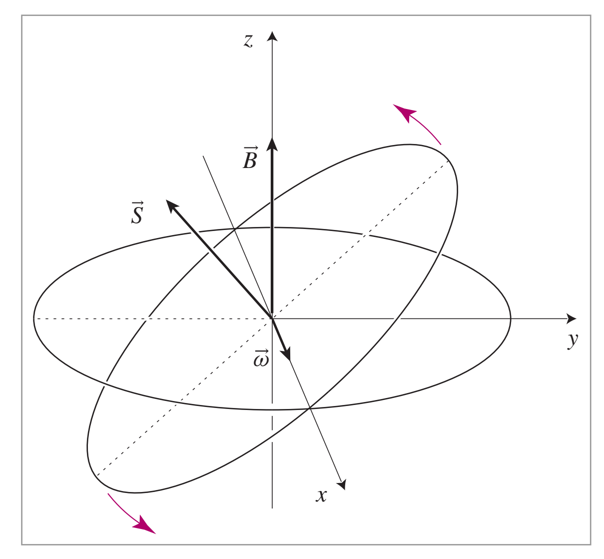


Fig. 11.6. Principe du générateur de courant alternatif.

Lorsque la spire tourne autour de son axe à la vitesse angulaire ω, le flux magnétique qui la traverse varie. Cette variation de flux du champ magnétique va induire un courant dans la spire dont l'intensité va varier au cours du temps à la fréquence ω. Plus quantitativement, le vecteur surface $\vec{S}$ dont le module est égal à la surface S de la spire et dont la direction normale au plan contenant la spire est orientée selon la règle du « bonhomme d'Ampère » peut s'écrire :

$$\vec{S} = S\vec{u}_z \cos \omega t + S\vec{u}_y \sin \omega t$$

Le flux du champ magnétique vaut donc :

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \omega t$$

On en déduit alors aisément la valeur de la force électromotrice $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = BS\omega \sin \omega t$$

Un courant I va circuler alors dans la spire, son intensité étant définie par la relation :

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{BS\omega}{R} \sin \omega t$$

Remarquons que ces variations du courant I, en quadrature avec celles de Φ, correspondent bien à celles données par la « loi de Lenz ». Tant que Φ diminue, le courant induit crée

un champ magnétique induit de même sens que $\vec{S}$, créant ainsi un flux induit qui s'ajoute au flux inducteur. Dès que Φ augmente, le flux induit est de sens opposé à $\vec{S}$, créant alors un flux induit négatif qui se retranche du flux inducteur. Dans chaque cas, le flux induit tend à s'opposer à la variation de flux qui lui a donné naissance.

2 Principe du moteur électrique

Considérons un système identique à celui présenté au paragraphe précédent, mais imposons maintenant, non plus le mouvement de rotation de la spire, mais le courant I qui la parcourt. Ce courant permet d'associer à la spire un moment magnétique $\vec{M} = I\vec{S}$; si la spire est libre de ses mouvements, sous l'effet de la force de Laplace qui s'exerce sur elle, elle subira un couple et elle tournera sur son axe de manière à orienter $\vec{M}$ le long du champ magnétique appliqué $\vec{B}$.

Dès que le moment magnétique $\vec{M}$ est orienté suivant le champ magnétique $\vec{B}$, le couple devient nul. Toutefois, si on conçoit les connexions liant la spire au générateur de courant I de telle sorte que le courant change de sens dans la spire à chaque demi-tour (essayer d'imaginer un tel système), le moment $\vec{M}$ sera perpétuellement « mal » orienté par rapport au champ magnétique et la spire ne cessera pas de tourner, ne trouvant jamais de position d'équilibre. Cette rotation de la spire, due à la désorientation perpétuelle du moment magnétique par rapport au champ, est le principe de base du fonctionnement de tout moteur électrique.

3 Principe d'un transformateur

Selon les lois de l'induction, un circuit soumis à un champ magnétique variable est parcouru par un courant induit. Ainsi, la variation d'intensité du courant dans une bobine induit un courant dans une seconde bobine. Si le courant existant dans la bobine génératrice est alternatif, le courant induit est bien entendu à la même fréquence, mais son intensité peut être très différente. En effet, le courant induit dépend de la force électromotrice induite, de la résistance de la bobine et de l'inductance mutuelle des deux bobines. Cette intensité pourra être plus grande ou plus petite suivant les géométries et les positions relatives retenues. Un tel système est un transformateur.

Exercices

1 Un solénoïde rectiligne de rayon r, de longueur $\mathcal{L} \gg r$ comportant N spires est parcouru par un courant variable $I(t)$. Une boucle plate de rayon R est placée de telle sorte que son axe de révolution coïncide avec celui du solénoïde. Quelle est la f.e.m. d'induction dans la boucle dans le cas où $R > r$ et $R < r$?

2 Un fil cylindrique, infiniment long, de diamètre d est parcouru par un courant constant I uniforme dirigé selon l'axe de révolution, noté Oz, du cylindre. Un circuit rectangulaire rigide de côtés a et b, de coefficient d'auto-induction et de résistance négligeables, est placé dans le plan xOz de façon que les deux côtés soient respectivement parallèles aux axes Ox et Oz.

a. Le courant I étant constant, on déplace ce circuit à vitesse constante. Déterminer en utilisant la loi de Faraday et le calcul de la circulation du champ électromoteur, la force électromotrice induite dans le cadre. Préciser le sens du courant induit. Trouver la direction et le sens de la résultante des forces de Laplace exercées sur le cadre. Ce résultat vous surprend-t-il ?

b. Le cadre est maintenant immobile et le courant I qui traverse le fil est sinusoïdal $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Calculer la f.e.m. induite en utilisant les deux méthodes indiquées dans la question précédente. Préciser, pendant la demi-période où I décroît, le sens du courant induit. Ce résultat vous surprend-t-il ?
Quelle est l'expression de la f.e.m. induite si le circuit se déplace à vitesse constante et que le courant varie sinusoïdalement ?

3 Une bobine, constituée de N spires enroulées sur un cadre circulaire, de rayon R, tourne autour d'un de ses diamètres à une vitesse angulaire ω constante telle que $\vec{\omega} = \omega \vec{u}_z$, dans un champ $\vec{B}$ uniforme perpendiculaire à Oz.

a. Trouver l'expression de la f.e.m. induite dans la bobine en tenant compte de son coefficient d'auto-induction L et de sa résistance R.

b. Calculer son amplitude si : $\omega = 5$ tr/s, $N = 50$, $R = 5$ cm, $B = 0,1$ T, $L = 1$ mH et $R = 1\ \Omega$.

4 On accole l'une contre l'autre, deux boucles identiques de coefficient d'auto induction L.

a. Calculer le coefficient de mutuelle induction M d'une boucle sur l'autre.

b. Discuter le signe de M en fonction du sens des courants parcourant les deux circuits,

5 On enroule régulièrement et dans le même sens deux bobines indépendantes de N_1 et N_2 spires jointives sur un support torique de rayon moyen R dont la section est un rectangle de hauteur h et de largeur a. Les deux bobinages sont parcourus par les courants I_1 et I_2.

a. Calculer les coefficients d'auto-induction L_1 et L_2 des deux circuits et leur coefficient de mutuelle induction M.

b. Calculer $L_1L_2 - M^2$, $L_1 - L_2 - 2M$ et le coefficient de couplage K.

c. Donner les expressions des différences de potentiel V_1 et V_2 aux bornes de deux circuits.

6 À l'intérieur d'un supraconducteur $\vec{E} = \vec{0}$ et $\vec{B} = \vec{0}$ dans des conditions idéales. Ceci se produit même si on refroidit le matériau en présence d'un champ magnétique.

a. Montrer que $\vec{B}$ est tangent à la surface juste à l'extérieur de celle-ci.

b. Montrer que $\vec{j}_{cond}$ est nul à l'intérieur de la surface du supraconducteur.
Des courants doivent donc circuler très près de la surface. On suppose des conditions stationnaires.

c. Existe-t-il une relation entre la composante tangentielle de $\vec{B}$ et la densité superficielle de courant ?

d. Montrer que le flux magnétique à travers une surface limitée par une courbe C entièrement située dans un supraconducteur pur doit rester constant.

e. Que se passe-t-il si l'on déplace un anneau supraconducteur d'un endroit où le champ magnétique vaut B_1 vers un autre où il vaut B_2 ?

Chapitre 12

Magnétisme dans la matière

Dans ce chapitre, nous commencerons par présenter les caractéristiques magnétiques d'un atome isolé en absence ou en présence d'un champ magnétique appliqué. Chaque atome étant associé à un dipôle magnétique permanent ou induit, cette notion sera étendue au cas d'un matériau magnétique pour lequel nous introduirons la notion d'aimantation et de courants d'aimantation. Nous en déduirons alors les propriétés magnétiques associées aux matériaux magnétiques, notamment les expressions des champs magnétiques $\vec{B}$ qu'ils engendrent dans l'espace. Nous verrons qu'il est souvent commode, pour calculer ces champs, d'introduire un champs auxiliaire $\vec{H}$ qui ne dépend que des courants électriques macroscopiques.

12.1 Aimantation de la matière

1 Caractéristique magnétique d'un atome

2 Caractéristiques magnétiques d'un système dense d'atomes ou de molécules

12.2 Champ magnétique et courants d'aimantation dans la matière

1 Champ magnétique dans la matière

2 Courant d'aimantation

12.3 Le champ auxiliaire $\vec{H}$

1 Définition du champ auxiliaire $\vec{H}$

2 Susceptibilité magnétique

3 Conditions de continuité des champs magnétique et auxiliaire

Complément : ferromagnétisme

Existence d'une température critique

Phénomène d'hystérésis

Mots-clés

- Aimentation
- Susceptibilité magnétique
- Courants ampériens
- Champ auxiliaire
- Diamagnétisme
- Paramagnétisme
- Ferromagnétisme

Jusqu'à présent, nous avons considéré que les champs magnétiques sont indissociablement liés aux courants électriques. Cependant notre expérience nous montre que de nombreux matériaux, tels les aimants permanents, présentent également des propriétés magnétiques sans pourtant qu'aucun courant apparent n'y circule. Comment résoudre ce paradoxe ? Ampère suggéra assez vite qu'il devait exister dans la matière magnétique, à l'échelle microscopique, des courants dits « ampériens » ne pouvant pas être directement mesurés à l'échelle macroscopique comme on peut le faire pour des courants chimiques. Cette hypothèse fut justifiée a posteriori dès que l'on eut compris plus précisément la structure de la matière à l'échelle atomique. Les courants ampériens pouvaient alors être interprétés comme liés à la circulation des électrons autour des noyaux ; la physique quantique a justifié cette interprétation et a même introduit une seconde contribution au magnétisme de la matière, sans équivalent classique, le spin.

Un peu d´histoire

Terre de Magnésie

L'origine du moi « magnétique » n'est pas sûre. Il semble toutefois probable que ce terme puisse être associé à la ville de Magnésie en Asie Mineure dans laquelle on trouvait deux sortes de pierres ; l'une aux vertus purgatives, la *magnêsia* ou magnésie en français, l'autre ayant la propriété d'attirer le fer, la *magnêtis* (*lithos*), la magnétite.

12.1. Aimantation de la matière

L'analyse des propriétés locales du champ magnétique nous a permis de conclure à l'inexistence de charges magnétiques isolées. En revanche, nous avons vu que toute boucle de courant pouvait être assimilée à un dipôle magnétique (voir chapitre 10). L'hypothèse des courants ampériens postulait l'existence de telles boucles à l'échelle microscopique et la description de la matière à l'échelle atomique a permis de les mettre en évidence.

1 Caractéristique magnétique d'un atome

Du point de vue de ses propriétés magnétiques, l'atome est caractérisé par deux grandeurs de natures radicalement différentes : son moment magnétique orbital $\vec{m}_L$ et son moment magnétique de spin $\vec{m}_S$. Alors que le premier peut être compris comme lié au mouvement des électrons autour de leur noyau, le second a une origine purement quantique que nous ne chercherons pas à expliquer, nous contentant ici d'en étudier les conséquences.

Moment magnétique orbital $\vec{m}_L$

Le modèle simple de Bohr nous permet de comprendre qualitativement la contribution orbitale du moment magnétique atomique. Dans ce modèle, un atome est constitué d'un noyau autour duquel gravitent des électrons, disposés sur diverses orbites atomiques. Le

mouvement de ces charges électroniques peut être assimilé à un courant qui crée un moment magnétique $\vec{m}_L$. Considérons par exemple un atome d'hydrogène pour lequel il n'y a qu'un seul électron périphérique (la généralisation à un atome quelconque peut s'effectuer par superposition des contributions de chaque orbite atomique). Dans le modèle de Bohr, cet électron gravite autour du noyau à une vitesse $\vec{v}$, sur une orbite circulaire de rayon r_0 (par commodité, nous choisirons d'orienter l'orbite de telle sorte que $v < 0$). Ce déplacement électronique peut être associé au courant I ayant pour valeur :

$$I = \frac{-ev}{2\pi r_0}$$

$v/2\pi r_0$ représentant le nombre de tours par seconde effectués par l'électron.

Ainsi le mouvement de l'électron autour de son noyau permet d'assimiler un atome neutre à une « boucle » de courant. À des distances grandes devant le rayon de Bohr r_0, une telle « boucle » de courant se comporte comme un dipôle magnétique dont le moment permanent orbital $\vec{m}_L$ a pour expression :

$$\vec{m}_L = I\pi r_0^2 \vec{n} = \frac{-evr_0}{2} \vec{n}$$

où $\vec{n}$ est le vecteur normal au plan de l'orbite électronique. L'indice L rappelle que ce moment magnétique est à rapprocher du moment angulaire $\vec{L} = \vec{r}_0 \wedge m_e \vec{v} = m_e r_0 v \vec{n}$.

Que se passe-t-il si nous soumettons maintenant cet atome d'hydrogène à un champ magnétique ? Nous supposerons que $\vec{B}$ est parallèle à $\vec{m}_L$ et que le champ magnétique s'établit entre les instants 0 et t. Pendant la période d'établissement du champ, son flux à travers l'orbite électronique va varier. En vertu de la loi de Lenz, un courant s'opposant à cette variation de flux va être induit dans la « boucle » atomique, autrement dit la vitesse de l'électron va être modifiée. Ceci a pour conséquence de réduire la valeur du moment $\vec{m}_L$. Évaluons cette variation de moment magnétique orbital. Le champ électrique $\vec{E}$, tangent à la trajectoire de l'électron, vérifie par définition la relation :

$$\int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 2\pi E r_0 = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

En multipliant les deux membres de cette équation par la charge électronique $-e$ et en intégrant sur le temps t, on obtient :

$$-eEt2\pi r_0 = e\big(\Phi(t) - \Phi(0)\big) = e\Phi(t) = e\pi r_0^2 B$$

Or, par définition, $-eEt$ correspond à la variation de la quantité de mouvement de l'électron. Nous obtenons ainsi :

$$\Delta v = v(t) - v(0) = \frac{Ber_0}{2m_e}$$

m_e étant la masse de l'électron. En supposant que le rayon de l'orbite reste le même (cette hypothèse n'est justifiée qu'au premier ordre), cette variation de vitesse correspond à une variation du moment dipolaire orbital $\Delta\vec{m}_L$ égal à :

$$\Delta\vec{m}_L = \vec{m}_L(t) - \vec{m}_L(0) = -\frac{e^2 r_0^2 \vec{B}}{4m_e} \tag{12.1}$$

Nous aurions obtenu le même résultat quelle que soit l'orientation du champ magnétique $\vec{B}$. Notons d'ailleurs que cette notion d'orientation relative entre le plan de l'orbite

électronique et le champ magnétique appliqué n'a pas grand sens, la « trajectoire » électronique ayant en fait la symétrie sphérique ; toutefois cette image, introduite ici par commodité, permet de simplifier considérablement les calculs du moment orbital. En appliquant le principe de superposition, la relation 12.1 se généralise également au cas d'un atome ayant plusieurs électrons en périphérie (dans le cas d'atomes ayant plusieurs orbites occupées, le résultat 12.1 pourra être appliqué en remplaçant r_0^2 par la moyenne des carrés des rayons des orbites). Ainsi, ce résultat montre que l'application d'un champ magnétique à un atome a pour conséquence une réduction de son moment magnétique orbital. Tous les atomes présentent cette caractéristique ; on parle du comportement « diamagnétique » des atomes.

Toutefois il convient de souligner que ces effets sont très petits ; la correction de vitesse électronique Δv étant de l'ordre de 10^6 fois plus faible que la vitesse des électrons, elle pourra être négligée tout comme l'effet diamagnétique qu'elle induit.

Un peu d'histoire

Courants moléculaires

Sur la base des résultats des expériences qu'il mena dès 1820 sur le magnétisme, Ampère développa initialement l'idée qu'il existait à l'échelle macroscopique des courants à la surface des aimants : « il ne me paraît guère possible de douter qu'il n'y ait réellement de tels courants autour des axes des aimants ». Il abandonna quelques mois plus tard cette idée au profit d'une interprétation basée sur des courants microscopiques « circulant autour de chacune de leurs particules ».

Moment magnétique de spin $\vec{m}_S$

Outre cette contribution orbitale, chaque atome peut posséder un moment magnétique supplémentaire $\vec{m}_S$ associé aux spins de ses constituants, noyau et électrons.

En effet, à chaque électron correspond un moment magnétique intrinsèque, dit de spin électronique. Bien que l'origine de ce moment permanent soit purement quantique, nous pouvons nous en faire une représentation en imaginant l'électron comme une particule chargée tournant sur elle-même, créant ainsi un courant et donc un moment magnétique. Pour un électron isolé, ce moment, appelé « magnéton de Bohr » μ_B, a pour valeur :

$$m_S = \mu_B = \frac{eh}{4\pi m_e}$$

où h est la constante de Planck. On a $\mu_B = 9,27 \cdot 10^{-24} \mathrm{A} \cdot \mathrm{m}^2$.

Considérons maintenant un atome contenant plusieurs électrons. Lorsqu'ils remplissent les différentes couches atomiques, une règle, dite « principe de Pauli », leur impose de se grouper par paires et d'orienter leurs moments de spin dans des directions opposées, le moment magnétique associé à chaque paire étant nul. Dans le cas d'un atome contenant un nombre pair d'électrons, le moment total associé aux spins sera nul. Pour les atomes contenant un nombre impair d'électrons, cette annulation est impossible. L'atome présentera donc un moment permanent de spin non nul.

À ce moment de spin électronique $\vec{m}_S$ s'ajoute celui associé au noyau atomique. Ainsi à chaque atome, pourrons-nous associer un moment magnétique permanent, superposition des contributions de spins des noyaux et des électrons périphériques (le moment associé au noyau est négligeable devant celui de l'électron, sa masse étant au moins 1000 fois plus grande). Si nous soumettons un tel atome à un champ magnétique, son moment magnétique de spin s'alignera avec le champ. Nous reviendrons sur cette question au paragraphe 2.

Pour conclure ce paragraphe consacré aux caractéristiques magnétiques d'un atome isolé, signalons qu'elles peuvent s'étendre sans difficulté à celles d'une molécule. En effet, dans la plupart des cas, les électrons d'une molécule sont localisés autour des atomes qui la constituent ; ainsi en utilisant le principe de superposition, on peut transposer, au moins qualitativement, les résultats obtenus pour l'atome à ceux de la molécule.

2 Caractéristiques magnétiques d'un système dense d'atomes ou de molécules

Considérons maintenant, non plus un atome ou une molécule isolée, mais un ensemble dense d'atomes ou de molécules. Les idées générales permettant de décrire de tels systèmes sont très similaires à celles que nous avons utilisées pour décrire les propriétés électrostatiques de la matière au chapitre 7. Nous emploierons donc le même type de démarche pour élaborer les concepts nécessaires à la description des propriétés magnétiques de la matière.

Pour commencer, il convient d'oublier le caractère discret des atomes ou des molécules qui constituent le matériau magnétique pour ne le considérer qu'à une échelle macroscopique. La notion de dipôle magnétique individuel $\vec{m}$ est alors remplacée par celle de densité d'aimantation $\vec{M}$, définie par la relation :

$$\vec{M} = N\vec{m}$$

N étant le nombre d'atomes ou de molécules par unité de volume. Cette aimantation (le terme « densité » ayant disparu à l'usage) est homogène à un dipôle magnétique par unité de volume et se mesure en ampère/mètre. Ainsi chaque élément de volume $d\tau$ du matériau pourra être caractérisé par un moment dipolaire magnétique $\vec{M}\,d\tau = N\vec{m}\,d\tau$.

Un peu d'histoire

Introduction de la notion d'aimantation

Poisson fut le premier en 1824 à introduire la notion « d'aimantation ». Cette grandeur, qui était une « grandeur dirigée » (nous dirions un vecteur), caractérisait localement le moment magnétique de l'unité de volume de chaque matériau et dépendait selon lui des distributions de ce qu'il appelait les « fluides boréal et austral » dans le matériau considéré. Cette notion introduite, il développa une méthode de calcul du champ magnétique créé par une distribution d'aimantation donnée et put ainsi montrer que les pôles correspondaient précisément aux directions vers lesquelles pointait « l'aimantation ».

Comment relier les caractéristiques de l'aimantation ainsi introduite à celles des atomes ou molécules isolés ? Examinons successivement les contributions orbitale et de spin.

Contribution orbitale à l'aimantation $\vec{M}_{\mathrm{L}}$

En absence de champ magnétique appliqué, la contribution orbitale à l'aimantation $\vec{M}_{\mathrm{L}}$ est nulle. En effet, bien que chaque atome ou molécule possède un moment magnétique orbital $\vec{m}_{\mathrm{L}}$ non nul, aucune direction particulière de ce moment n'est à privilégier. En conséquence de quoi, les orientations de ces moments individuels sont aléatoirement distribuées et leur orientation moyenne est nulle.

En revanche, en présence d'un champ magnétique appliqué, il existe une contribution orbitale $\vec{M}_{\mathrm{L}}$ induite qui est, dans la plupart des cas, la simple juxtaposition des corrections diamagnétiques individuelles $\Delta\vec{m}_{\mathrm{L}}$. En effet, l'application d'un champ magnétique définit une orientation particulière de l'espace qui sera, en vertu de la relation 12.1, celle de toutes les corrections $\Delta\vec{m}_{\mathrm{L}}$; les effets de moyenne évoqués pour annuler la contribution permanente ne peuvent plus s'appliquer et la contribution orbitale à l'aimantation induite est égale à $N\Delta\vec{m}_{\mathrm{L}}$.

Cette procédure grossière est en général suffisante pour décrire le comportement orbital de l'aimantation, mais ce n'est pas toujours le cas. En particulier, elle rendra mal compte de l'aimantation induite dans les conducteurs pour lesquels les électrons de conduction sont libres de se déplacer dans tout le matériau, apportant eux aussi une contribution magnétique orbitale macroscopique propre qui ne pourra pas être une conséquence directe des comportements microscopiques individuels.

Contribution de spin à l'aimantation $\vec{M}_{\mathrm{S}}$

Seuls les matériaux constitués d'atomes ou de molécules ayant un moment individuel non nul présenteront une contribution de spin.

En absence de champ magnétique, les différents moments individuels sont, dans la plupart des cas, indépendants les uns des autres. Ils s'orientent alors de façon aléatoire dans toutes les directions. En moyenne, l'aimantation $\vec{M}_{\mathrm{S}}$ est nulle. Le système est dit « paramagnétique ». Toutefois il existe une classe très importante de matériaux, les « ferromagnétiques », dans lesquels les moments individuels ne sont pas indépendants : les aimants permanents sont un exemple de ces matériaux qui jouent un rôle essentiel dans le magnétisme instrumental et industriel. Les interactions entre moments de spins entraînent alors des comportements collectifs tendant à orienter les moments individuels les uns par rapport aux autres, ce qui conduit à une aimantation de spins $\vec{M}_{\mathrm{S}}$ macroscopique non nulle. Les propriétés générales de ces matériaux sont présentées dans le complément en fin de chapitre.

Si nous soumettons à un champ magnétique $\vec{B}$ un matériau dont les constituants possèdent un moment de spin non nul, ces moments vont avoir tous tendance à s'orienter dans la direction du champ magnétique pour minimiser leur énergie (voir chapitre 13). Toutefois l'agitation thermique tend à les désorienter les uns par rapport aux autres. Il en résulte une aimantation induite, dite d'« orientation », parallèle au champ qui est un compromis entre ces deux effets. Nous avons déjà rencontré cette situation au chapitre 7 lorsque nous avons discuté la polarisation d'orientation d'un diélectrique.

Plus quantitativement, les dipôles, purement quantiques, ne peuvent s'aligner que suivant le champ magnétique ou suivant la direction opposée. Comme nous le verrons au chapitre 13, leur énergie dans le champ magnétique $\vec{B}$ est égale à $-\vec{m}_S\vec{B}$. À l'équilibre thermique, les nombres moyens de moments $\vec{m}_S$ parallèles ou antiparallèles au champ magnétique $\vec{B}$, notés respectivement n_+ et n_-, sont donnés par la statistique de Maxwell-Boltzmann et sont égaux à :

$$n_+ = K\mathrm{e}^{m_S B/\mathrm{k}T} \qquad n_- = K\mathrm{e}^{-m_S B/\mathrm{k}T}$$

k et T ayant été définis au paragraphe 2.3 du chapitre 4 et le coefficient de proportionnalité K étant déterminé d'après la relation :

$$N = n_+ + n_- = K\left(\mathrm{e}^{m_S B/\mathrm{k}T} + \mathrm{e}^{-m_S B/\mathrm{k}T}\right)$$

Nous obtenons ainsi une expression simple de l'aimantation induite d'orientation, parallèle au champ magnétique :

$$\vec{M}_S = n_+\vec{m}_S + n_-(-\vec{m}_S) = \vec{m}_S(n_+ - n_-) = \vec{m}_S N \tanh(m_S B/kT)$$

Dans le cas de la polarisation d'orientation décrite au chapitre 7, le moment dipolaire électrique individuel pouvait prendre n'importe quelle orientation par rapport au champ électrique $\vec{E}$; cette différence de comportement est due au fait que le moment dipolaire électrique est classique tandis que le moment de spin est une propriété purement quantique.

À température nulle, il n'y a aucune agitation thermique, tous les moments de spins sont alignés selon le champ magnétique. Au fur et à mesure de l'augmentation de la température du système, les spins se désorientent ; toutefois, la population de moments alignés sur le champ magnétique reste, pour des raisons énergétiques, supérieure ou égale à celle des moments anti-parallèles. Enfin, si on fait tendre la température du système vers l'infini, les deux populations sont égales et le système ne présente plus d'aimantation. Ainsi dans la matière dense, les spins apportent une contribution à l'aimantation, parallèle au champ appliqué ; cette contribution décroît avec la température. On parle de la « contribution paramagnétique de spins ».

Classification des matériaux selon leurs propriétés magnétiques

Nous pouvons, maintenant classer les matériaux suivant trois catégories, selon l'importance relative de chacune des contributions à l'aimantation. Pour simplifier cette présentation, tous ces matériaux seront supposés isotropes. Lorsque cela a un sens, on définit une susceptibilité magnétique représentée par la lettre grecque χ, qui mesure le rapport de l'aimantation au champ qui la produit.

Un peu d'histoire

Corps magnétiques

La classification des corps suivant leurs caractéristiques magnétiques est due à Faraday qui découvrit en 1845 les matériaux diamagnétiques en étudiant l'orientation d'un verre lourd suspendu dans un champ magnétique. En effectuant des études systématiques, il conclut que tous les matériaux présentaient des propriétés magnétiques et il les classa en trois catégories selon l'orientation qu'ils prenaient lorsqu'on les suspendait à un fil dans un champ magnétique.

• Considérons tout d'abord les matériaux diamagnétiques. Dans ces matériaux, la contribution des spins est nulle ou négligeable ; il ne reste alors qu'une aimantation induite due à la contribution orbitale. S'il s'agit de la contribution orbitale atomique, la susceptibilité magnétique χ_d associée est de la forme :

$$\chi_d = \frac{M_S}{B} = -\frac{ne^2 r_0^2}{4m_e}$$

Cette situation correspond aux matériaux constitués généralement d'atomes dont les couches externes sont pleines, le moment associé étant alors nul. Il peut donc s'agir par exemple de cristaux de gaz rares ou de cristaux ioniques (NaCl, ZnS, CsCl...). Dans les cristaux ioniques, un électron « quitte » le cation pour « se fixer » sur l'anion. Initialement neutres ceux-ci deviennent respectivement chargés positivement et négativement. Ce « transfert » de charge électronique correspond à la constitution d'orbitales externes pleines, le cation se dépouillant des électrons de sa couche externe tandis que l'anion les récupère pour remplir sa couche externe.

Certains systèmes possédant des électrons libres de se déplacer peuvent présenter également des comportements diamagnétiques. Dans ces systèmes, les électrons sous l'action du champ appliqué prennent des orbites circulaires et ce courant de charges crée un champ magnétique opposé au champ appliqué (Loi de Lenz). Il en résulte un comportement diamagnétique qu'il n'est pas utile de décrire plus en détails ici. Dans certains métaux (cuivre, plomb), mais également pour les semi-conducteurs, cette contribution sera dominante et le matériau est alors diamagnétique. Dans tous les cas, l'aimantation est faible, de l'ordre de 10^{-6} fois le champ appliqué.

• Dans les matériaux paramagnétiques, les moments de spins sont non nuls mais indépendants. Ils ne présentent donc pas d'aimantation en absence de champ magnétique externe. En revanche, dans un champ magnétique, les contributions des spins sont dominantes devant les contributions diamagnétiques ; l'aimantation induite est alors caractérisée essentiellement par sa contribution paramagnétique de spins. Pour des champs magnétiques usuels, $\mu_B B/kT$ est de l'ordre de 10^{-3}, la susceptibilité paramagnétique χ_p calculée au premier ordre est alors égale à :

$$\chi_p = \frac{M_S}{B} = \frac{N\mu_B^2}{kT}$$

Les matériaux présentant ce type de comportement peuvent se classer grossièrement en trois catégories : les systèmes dont les constituants possèdent un nombre impair d'électrons, les systèmes dont les atomes possèdent une couche interne incomplète (éléments de transition) et enfin les métaux non magnétiques pour lesquels la contribution diamagnétique n'est pas dominante (sodium, aluminium...). Dans tous les cas, l'ordre de grandeur de l'aimantation est d'environ 10^{-3} fois le champ appliqué.

• Enfin dans les matériaux ferromagnétiques, les moments de spins sont en interaction entre eux. Il en résulte trois comportements caractéristiques qui les différencient des autres matériaux. En champ nul, ces matériaux présentent une aimantation non nulle ; pour un champ donné, l'aimantation induite est supérieure de plusieurs ordres de grandeur à celles des matériaux paramagnétiques, enfin ces deux propriétés remarquables disparaissent au-dessus d'une température critique pour laquelle l'agitation thermique est alors telle que

tous les moments de spins redevenant indépendants, le matériau retrouve des propriétés paramagnétiques. Les aimants permanents appartiennent à cette classe de matériaux. Vous pouvez vous convaincre de cette dernière propriété des ferromagnétiques en prenant un aimant vers lequel sont attirés des clous. Si vous chauffez ces clous au-dessus de leur température critique, vous constaterez qu'ils se détachent de l'aimant : ils ont perdu leur caractère ferromagnétique, mais ils le retrouvent par refroidissement. Les exemples les plus répandus d'aimant sont les métaux magnétiques et leurs alliages (fer, cobalt, magnétite Fe_3O_4...) et certains alliages à base de chrome ou de manganèse.

12.2. Champ magnétique et courants d'aimantation dans la matière

1 Champ magnétique dans la matière

Considérons un matériau magnétique soumis à un champ magnétique extérieur $\vec{B}_0$. Que pouvons-nous dire du champ magnétique créé par ce système en tout point de l'espace ?

Hors du matériau, le principe de superposition nous permet d'affirmer que le champ magnétique $\vec{B}$ est égal à $\vec{B}_0$ augmenté de la contribution associée aux dipôles magnétiques constituant le matériau. Par définition, chaque point à l'extérieur du matériau est loin de n'importe quel dipôle magnétique individuel, aussi la contribution dipolaire pourra-t-elle être calculée en considérant le matériau comme une distribution continue de dipôles magnétiques caractérisée par l'aimantation $\vec{M}$.

La description du champ magnétique à l'intérieur du matériau est plus délicate. Bien entendu le champ magnétique réel est, comme à l'extérieur, égal à $\vec{B}_0$ augmenté de la contribution dipolaire. Ce qui va changer, c'est la façon dont on calcule cette dernière contribution en un point particulier. En effet, il faudra maintenant tenir compte partiellement du caractère discret de la distribution des dipôles, au moins en ce qui concerne les dipôles appartenant à un voisinage immédiat du point considéré, les autres pouvant continuer à être décrits par une aimantation $\vec{M}$. Le champ magnétique ainsi déterminé sera appelé champ magnétique local. C'est ce champ magnétique local qui agit sur chaque atome ou molécule, crée les moments dipolaires induits et détermine donc le comportement magnétique du matériau.

Comme dans le cas des matériaux diélectriques dans lesquels il n'était pas nécessaire de connaître le détail du champ électrique local, il n'est pas non plus nécessaire de connaître ce champ magnétique local en tout point du matériau pour pouvoir décrire ses propriétés magnétiques à l'échelle macroscopique. En effet, si nous nous intéressons à des phénomènes qui s'établissent sur les dimensions macroscopiques du système, il nous suffit en fait de connaître la valeur moyenne dans le temps et dans l'espace de ce champ local qui varie sur des distances de l'ordre de la distance interatomique et fluctue constamment en fonction du temps en raison de l'agitation thermique. C'est cette valeur moyenne du champ local que nous appellerons dorénavant champ magnétique $\vec{B}$.

Ce champ magnétique $\vec{B}$, qui, par définition, ne varie que sur de grandes distances, doit être considéré comme le champ magnétique exact à l'extérieur du matériau et comme la moyenne des champs locaux à l'intérieur du milieu magnétique. De ce point de vue, $\vec{B}$ est à rapprocher de la notion précédente d'aimantation $\vec{M}$.

2 Courant d'aimantation

Comme dans le cas des diélectriques, nous allons, pour calculer ce champ magnétique $\vec{B}$, établir les équations constitutives auxquelles il doit obéir. On aurait pu envisager de calculer le champ local puis d'effectuer sa moyenne mais pour que celle-ci ait un sens, elle devrait être faite sur des temps grands devant le temps caractéristique des fluctuations temporelles de chaque dipôle et sur des dimensions grandes devant la distance interatomique ou intermoléculaire.

Le champ magnétique $\vec{B}_{loc}$, doit tout d'abord vérifier l'une des équations fondamentales de la magnétostatique :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}_{loc} = 0$$

Cette équation signifiant l'inexistence de charges magnétiques isolées, elle doit être également vérifiée par le champ magnétique $\vec{B}$, aucun effet de moyenne ne pouvant permettre de mettre en évidence de telles charges. Nous obtenons donc la première équation devant être vérifiée par $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad (12.2)$$

Par ailleurs, le champ magnétique local vérifie également l'équation :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B}_{loc} = \mu_0 \vec{J}_{loc}$$

$\vec{J}_{loc}$ représentant la densité volumique de courants locaux à l'échelle atomique. La moyenne de l'équation nous conduit à la seconde équation fondamentale devant être vérifiée par $\vec{B}$:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \qquad (12.3)$$

Dans cette expression, $\vec{J}$ représente la densité volumique de courant macroscopique, moyenne de la densité à l'échelle microscopique.

Il convient de préciser la nature de cette densité volumique de courant $\vec{J}$. Considérons un milieu caractérisé par une aimantation $\vec{M}$. Chaque élément infinitésimal de volume du matériau peut alors être assimilé à un moment dipolaire magnétique $\vec{M}\,\mathrm{d}\tau$, équivalent à un courant $\mathrm{d}I$ circulant à la surface de l'élément infinitésimal (fig. 12.1).

Si l'aimantation est homogène, on conçoit que ces courants de surface s'annulent deux à deux sur les parois communes des cellules. Les seuls à ne pas se compenser sont les courants externes circulant à la surface de l'élément infinitésimal. Ces courants de surface externes peuvent être décrits par une densité surfacique de courant notée $\vec{j}$ qui est homogène à l'aimantation. Sa direction est parallèle à la surface et son orientation est prise en compte par la relation :

$$\vec{j} = \vec{M} \wedge \vec{n} \qquad (12.4)$$

$\vec{n}$ étant le vecteur unitaire normal à la surface.

La situation est un peu plus compliquée si l'aimantation varie d'un point à un autre du matériau car, dans ce cas, il n'y a pas compensation des courants circulant sur les parois des cellules infinitésimales. Nous ne ferons pas ici le calcul correspondant et nous admettrons qu'il suffit dans ce cas d'introduire une densité volumique de courant d'aimantation :

$$\vec{J} = \vec{\nabla} \wedge \vec{M} \qquad (12.5)$$

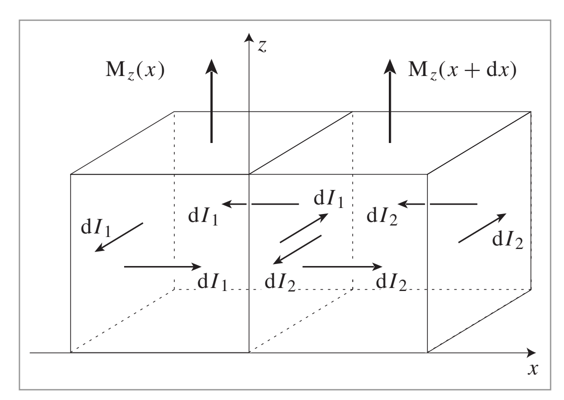


Fig. 12.1. Éléments infinitésimaux d'un matériau aimanté.

Soulignons encore une fois que $\vec{j}$ et $\vec{J}$ ne correspondent pas à des courants supplémentaires différents de ceux créés par les mouvements électroniques autour des noyaux atomiques. Ces courants surfacique et volumique n'apparaissent que pour permettre une description cohérente du système en termes de grandeurs moyennes (de ce point de vue, ils sont à rapprocher des densités surfacique et volumique des charges de polarisation).

Ainsi, à l'échelle macroscopique, si nous connaissons l'aimantation $\vec{M}$ d'un matériau, ce système pourra être décrit comme un ensemble de courants caractérisés par une densité surfacique $\vec{j} = \vec{M} \wedge \vec{n}$ et une densité volumique $\vec{J} = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$, ces courants permettant de calculer le champ magnétique non seulement à l'intérieur mais également à l'extérieur de la matière.

Un peu d'histoire

Théorie des deux ensembles

Poisson présenta à l'académie des sciences en 1824 un *Mémoire sur la théorie du magnétisme*. Dans ce traité, partant des idées de Coulomb, il se proposait d'expliquer le magnétisme à partir de la séparation sur des distances extrêmement faibles de deux fluides magnétiques, le fluide boréal (Nord) et le fluide austral (Sud) et il introduisit à cette occasion l'idée que cette séparation pouvait peut-être se faire « dans les molécules mêmes des corps aimantés » introduits par Ampère en 1820. Cette théorie fut définitivement abandonnée en 1850 après les travaux de Thomson sur les matériaux magnétiques, Lord Kelvin ayant développé une théorie phénoménologique basée sur les grandeurs mesurables, aimantation, susceptibilité et perméabilité.

12.3. Le champ auxiliaire $\vec{H}$

Dans les chapitres précédents, nous avons établi un certain nombre de relations permettant de calculer le champ magnétique créé dans le vide par des courants électriques. Au paragraphe 12.2 nous avons vu que dans les situations physiques faisant intervenir de la

matière, il convient d'adjoindre à ces courants électriques ordinaires, dit « libres », c'est-à-dire pouvant varier à volonté, les courants ampériens rendant compte de l'aimantation du matériau.

Bien entendu nous n'avons pas accès directement à l'aimantation, aussi est-il en général plus judicieux d'introduire un champ $\vec{H}$, dit champ auxiliaire (parfois appelé champ magnétique !) qui ne dépend que des courants « libres » que l'on contrôle. Nous pourrons alors le calculer et en déduire, à l'aide de relations phénoménologiques, les expressions de $\vec{M}$ et $\vec{B}$.

1 Définition du champ auxiliaire $\vec{H}$

Nous allons construire ce champ auxiliaire $\vec{H}$. Considérons donc un circuit immergé dans un matériau magnétique et faisons circuler dans ce circuit un courant macroscopique caractérisé par une densité volumique $\vec{J}_1$. L'aimantation du matériau sera décrite par les densités de courants ampériens $\vec{J}_A$. Ainsi, en toute généralité, le théorème d'Ampère doit s'écrire sous la forme :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0(\vec{J}_1 + \vec{J}_A) = \mu_0(\vec{J}_1 + \vec{\nabla} \wedge \vec{M})$$

Nous pouvons alors définir le champ auxiliaire $\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M}$ qui vérifie l'équation locale :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \vec{J}_1 \tag{12.6}$$

La structure de cette équation montre que les propriétés du champ magnétique dans le vide se transposent à celles du champ auxiliaire $\vec{H}$ lorsque le circuit est immergé dans de la matière. Nous pourrons ainsi calculer le champ auxiliaire $\vec{H}$ en appliquant tous les résultats du chapitre 9 consacré aux champs magnétiques dans le vide, pourvu que nous nous limitions aux courants libres. $\vec{H}$ connu, nous pourrons alors en déduire l'aimantation $\vec{M}$ puis le champ magnétique $\vec{B}$. Notons toutefois que ce champ auxiliaire n'a pas la dimension d'un champ magnétique mais celle d'une aimantation. Il se mesure en ampère/mètre.

2 Susceptibilité magnétique

Nous nous limiterons ici au cas d'un matériau isotrope homogène linéaire dont les propriétés magnétiques sont entièrement prises en compte par une grandeur ne dépendant que de la température, la susceptibilité magnétique (les ferromagnétiques ne font pas partie de cette catégorie de matériaux et nécessitent une étude spécifique).

Dans le cas d'une aimantation induite, nous pouvons définir la susceptibilité magnétique χ_m au moyen de la relation :

$$\vec{M} = \frac{\chi_m}{\mu_0}\vec{B}$$

Formellement, par analogie avec la définition de la susceptibilité diélectrique donnée au chapitre 7, nous aurions dû définir la susceptibilité magnétique par $\frac{\chi_m}{\mu_0}$. Toutefois la définition retenue a une justification pratique, cette notation conduisant en effet à la relation $\vec{M} = \chi_m\vec{H}$ qui est celle que l'on détermine expérimentalement.

Dans la plupart des matériaux, l'aimantation est proportionnelle à $\vec{H}$ et la susceptibilité est un scalaire, négatif dans le cas des matériaux diamagnétiques, positif dans celui des matériaux paramagnétiques. Le champ magnétique est alors simplement proportionnel au champ auxiliaire $\vec{H}$:

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} \\ \vec{B} &= \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H} \end{aligned} \tag{12.7}$$

Les coefficients μ et μ_r sont appelés respectivement la permittivité et la permittivité relative du milieu. En d'autres termes, les relations 12.6 et 12.7 nous indiquent que le champ magnétique $\vec{B}$ créé par des courants macroscopiques immergés dans ou autour de matériaux magnétiques isotropes, linéaires et homogènes, se calcule comme dans le vide, à condition de remplacer la permittivité du vide par celle du milieu. Soulignons encore une fois que nous ne pourrions pas utiliser ces formules dans le cas de matériaux présentant une aimantation permanente.

3 Conditions de continuité des champs magnétique et auxiliaire

Examinons maintenant les conditions de continuité auxquelles doivent satisfaire les champs magnétique $\vec{B}$ et auxiliaire $\vec{H}$ au passage d'une interface entre deux milieux.

Conservation de la composante normale du champ magnétique $\vec{B}$

Considérons tout d'abord un cylindre dont les faces supérieure et inférieure, infiniment proches, sont parallèles à la surface séparant les deux milieux et calculons le flux de $\vec{B}$ à travers la surface limitant ce cylindre (fig. 12.2).

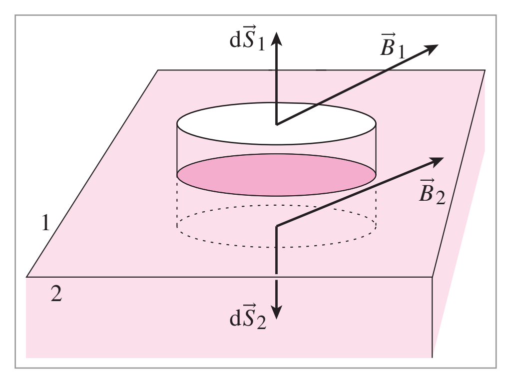


Fig. 12.2.

En appliquant le théorème de Green-Ostrogradsky, nous constatons que ce flux est nul puisque la divergence de $\vec{B}$ est nulle. Le flux à travers la surface latérale étant nul par construction, nous pouvons en conclure que le flux à travers la surface supérieure doit être égal en valeur absolue à celui à travers la surface inférieure. Nous obtenons ainsi :

$$\begin{gathered} \vec{B}_1 \cdot d\,\vec{S}_1 + \vec{B}_2 \cdot d\,\vec{S}_2 = 0 \\ B_{n_1} = B_{n_2} \end{gathered} \tag{12.8}$$

La composante normale du champ magnétique doit être continue à la traversée de l'interface.

Discontinuité de la composante tangentielle du champ magnétique $\vec{B}$

À la différence de ses composantes normales, les composantes tangentielles du champ magnétique présentent une discontinuité à l'interface.

En effet, considérons maintenant le circuit fermé présenté sur la figure 12.3, les deux segments parallèles étant infiniment proches.

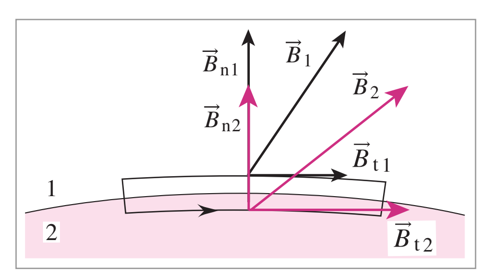


Fig. 12.3.

D'après le théorème d'Ampère, la circulation du champ magnétique $\vec{B}$ le long de ce circuit doit être proportionnelle aux courants traversant ce circuit. Puisque les deux éléments principaux du circuit sont infiniment proches, il ne peut s'agir que de courants à l'interface. Il n'existe pas de tels courants libres, néanmoins nous avons vu que, dans le cas de matériaux magnétiques, il existait des courants ampériens de surface. Nous obtenons ainsi :

$$B_{t1} - B_{t2} = \mu_0(j_1 - j_2) \quad (12.9)$$

Conservation de la composante tangentielle du champ auxiliaire

Si nous calculons la circulation du champ auxiliaire $\vec{H}$ le long de ce même circuit, elle est nulle puisqu'il n'existe pas de courant libre à l'interface. Nous pouvons donc conclure que les composantes tangentielles du champ auxiliaire sont égales :

$$H_{t1} = H_{t2} \quad (12.10)$$

Complément : ferromagnétisme

Nous avons déjà mentionné les propriétés particulières des matériaux ferromagnétiques qui se caractérisent par trois comportements spécifiques : à basse température ($T < T_c$), existence d'une aimantation spontanée en absence d'un champ magnétique appliqué, existence d'une susceptibilité magnétique extrèmement élevée, existence d'une température critique T_c au-dessus de laquelle le matériau acquiert un comportement paramagnétique. Nous allons ici décrire plus en détails ces matériaux et préciser notamment le sens de ces différents termes.

Existence d'une température critique

Comment peut-on comprendre plus quantitativement le comportement des matériaux ferromagnétiques et en particulier l'existence d'une température critique T_c ? Dans ces matériaux, les moments magnétiques individuels des atomes ne sont pas indépendants mais il existe au contraire un couplage très fort entre ces moments qui a pour effet de les aligner tous, ou presque ; nous ne rentrerons pas dans le détail des origines de cette intense interaction, dite « d'échange », qui, comme le spin, est de nature purement quantique. On peut dans ce cas montrer qu'en présence d'un champ appliqué, le champ

magnétique local $\vec{B}_{\mathrm{loc}}$ responsable de cet alignement s'écrit formellement sous la forme $\vec{B}_{\mathrm{loc}} = \mu_0(\vec{H} + \lambda\vec{M})$ où λ est une constante inconnue mais très supérieure à 1 et que l'aimantation $\vec{M}$ est donnée par la relation :

$$|\vec{M}| = N\mu_{\mathrm{B}} \tanh \frac{\mu_{\mathrm{B}} B_{\mathrm{loc}}}{\mathrm{k}T} = N\mu_{\mathrm{B}} \tanh \frac{\mu_{\mathrm{B}}\mu_0(H + \lambda M)}{\mathrm{k}T}$$

La forme même de l'expression de $\vec{B}_{\mathrm{loc}}$ montre qu'il s'agit là d'une interaction différente de l'interaction dipolaire décrite dans les chapitres précédents.

En introduisant les variables :

$$x = \frac{\mu_{\mathrm{B}}\mu_0}{\mathrm{k}T}(H + \lambda M)$$

$$y = \frac{M}{N\mu_{\mathrm{B}}}$$

$$\alpha = \frac{\mu_{\mathrm{B}}}{\mathrm{k}T}\mu_0 H$$

$$\beta = \frac{\mu_0\mu_{\mathrm{B}}^2 N}{\mathrm{k}T}\lambda$$

on peut réécrire ces deux relations sous la forme :

$$y = \tanh x$$
$$x = \alpha + \beta y$$

Pour un $\vec{H}$ donné, l'état magnétique du système est obtenu par la résolution simultanée de ces deux équations qui est obtenue graphiquement par l'intersection de ces deux courbes (fig. 12.4).

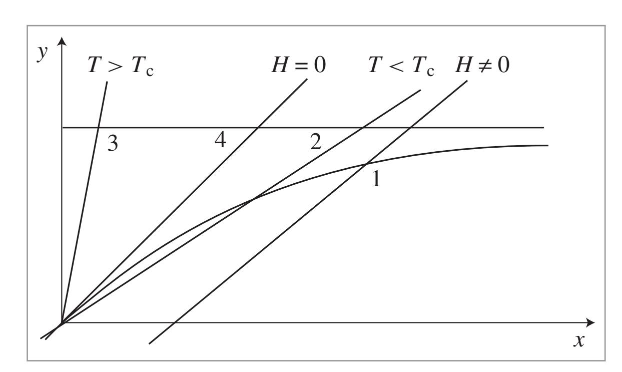


Fig. 12.4.

Lorsque le champ magnétique appliqué est non nul, $\vec{H} \neq 0$ ($\alpha \neq 0$), il existe toujours une solution comme le montre la droite 1. En particulier, si la pente de la droite est faible, $\beta < 1$, l'intersection avec la courbe se produit pour des valeurs assez élevées de y, ce qui correspond à de fortes aimantations pouvant dans les cas extrêmes être proches de l'aimantation de saturation définie par $M_{\mathrm{sat}} = N\mu_{\mathrm{B}}$ (tous les moments sont alignés).

Examinons maintenant le cas où le champ appliqué est nul. Dans ce cas, $\vec{H} = 0$ et l'état magnétique du système est alors simplement donné par l'intersection de la droite $y = \frac{x}{\beta}$ avec la courbe $y = \tanh x$. Comme le montre la figure, les solutions obtenues dépendent de la valeur de la pente $\frac{1}{\beta}$.

Lorsque $\frac{1}{\beta} < 1$, il existe une solution autre que $x = y = 0$ (droite 2). Ceci indique que le système présente une aimantation spontanée. Le système est dans sa phase ferromagnétique. En revanche, si $\frac{1}{\beta} > 1$, la seule solution possible correspond à l'origine (droite 3), le système ne présente alors aucune aimantation. Le changement de comportement de ce système apparaît pour la valeur critique $\beta_c = 1$ (droite 4) qui peut s'identifier à une température critique T_c, dite « température de Curie », telle que :

$$kT_c = \mu_0 \mu_B^2 N \lambda$$

Remarquons que cette température de Curie, qui augmente avec la densité de moments à aligner et avec l'interaction λ, varie d'un matériau à l'autre. Elle vaut par exemple 770 °C pour le fer alors qu'elle n'est que de 358 °C pour le nickel. Pour $T < T_c$, $\frac{1}{\beta} < 1$, il existe une aimantation spontanée (domaine ferromagnétique) tandis que pour $T > T_c$ cette aimantation est nulle en absence de champ appliqué (domaine paramagnétique).

Enfin, si on se place à une température supérieure mais voisine de T_c, pour un champ $\vec{H}$ non nul, on peut résoudre le système d'équations en approximant la tangente hyperbolique par sa pente à l'origine. Nous avons alors :

$$y = x$$
$$x = \alpha + \frac{T_c}{T} x$$

et donc :

$$x\left(1 - \frac{T}{T_c}\right) = \frac{\mu_0 \mu_B H}{kT}$$

Nous obtenons ainsi l'expression de l'aimantation lorsque le système est dans sa phase paramagnétique à une température très proche de T_c :

$$M = \frac{N\mu_B^2}{k(T - T_c)} \mu_0 H = \mu_0 \chi_m H$$

Cette relation constitue la « loi de Curie-Weiss ». Elle exprime le fait que la susceptibilité paramagnétique X_m devient infinie lorsqu'on s'approche par valeurs supérieures de la température de Curie. Elle est parfaitement vérifiée pour l'ensemble des corps ferromagnétiques. Soulignons que la mesure de T_c permet d'accéder expérimentalement au paramètre inconnu λ :

$$\lambda = \frac{kT_c}{\mu_0 \mu_B^2 N}$$

Précisons maintenant quelques ordres de grandeur et prenons l'exemple du nickel. Dans ce matériau, la température critique $T_c = 631$ K et la densité de moments par unité de volume est égale à $N = 9 \cdot 10^{28}$ m^{-3}. On peut en déduire une valeur de λ :

$$\lambda \approx 900$$

On vérifie bien, a posteriori, que l'hypothèse d'un champ magnétique local très supérieur à $\mu_0 \vec{H}$ était justifiée.

Phénomène d'hystérésis

Courbe d'hystérésis

Plaçons-nous dans la phase ferromagnétique, $T < T_c$, et étudions maintenant un phénomène caractéristique de cette phase : l'hystérésis. Considérons un tore constitué d'un matériau ferromagnétique dont le rayon R est grand par rapport aux dimensions de sa section (si la section est circulaire, $S = \pi r^2$ avec $r \ll R$) sur lequel sont enroulées N spires jointives d'un fil conducteur (fig. 12.5).

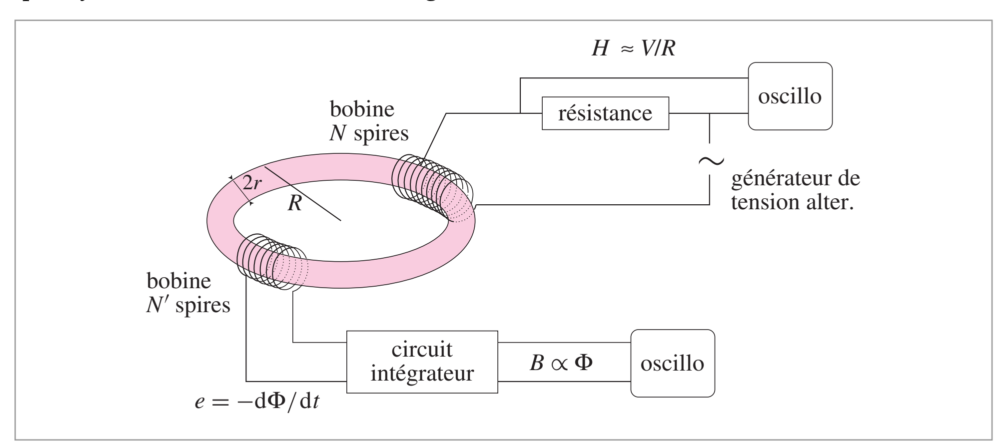


Fig. 12.5. Montage de mise en évidence du phénomène d'hystérésis.

Pour évaluer l'aimantation du ferromagnétique il suffit de faire passer un courant dans la bobine, déterminant ainsi le champ auxiliaire $\vec{H}$, et d'évaluer le champ magnétique $\vec{B}$ ainsi créé grâce à la mesure du flux traversant une seconde bobine.

La relation entre l'aimantation $\vec{M}$ et le champ $\vec{H}$ dépend en fait de l'histoire du matériau. Nous nous limiterons ici au cas simple d'un tore en fer soumis à un champ auxiliaire alternatif. Lorsque le champ auxiliaire $\vec{H}$ croît d'une façon continue jusqu'à la valeur $\vec{H}_1$, le champ magnétique $\vec{B}$ commence par croître lentement puis plus rapidement pour atteindre une valeur limite correspondant à une aimantation maximale, dite « aimantation saturée ». Cette variation représentée par la courbe OA est dite courbe de « première aimantation » (fig. 12.6).

Si maintenant nous faisons décroître de façon continue $\vec{H}$ de $\vec{H}_1$ jusqu'à 0, les variations du champ $\vec{B}$ ne suivent pas la courbe de première aimantation, la courbe représentative demeure au-dessus de la précédente. En particulier lorsque le champ $\vec{H}$ redevient nul, le tore demeure aimanté. Il y a une aimantation « rémanente ». Inversons le sens du courant, et faisons croître le champ $\vec{H}$ en sens inverse de 0 à $-\vec{H}_1$.

Pour une certaine valeur $\vec{H}_c$ du champ auxiliaire, dit « champ coercitif », le champ magnétique $\vec{B}$ s'annule. Au delà, l'aimantation s'aligne sur le champ $\vec{H}$ jusqu'à atteindre en module la valeur de saturation. Diminuons alors le courant pour faire varier le champ $\vec{H}$ de $-\vec{H}_1$ à 0 : la courbe représentative est encore différente et reste en dessous des deux premières. L'aimantation est négative quand $\vec{H} = 0$. Enfin si on augmente de nouveau le champ $\vec{H}$ jusqu'à $\vec{H}_1$ on retrouve l'état initial $\vec{B}$. Si on parcourt un grand nombre de fois le cycle complet, on constate qu'il est reproductible à une température donnée. Ce

cycle s'appelle « cycle d'hystérésis ». Il indique qu'à chaque instant, l'aimantation et le champ magnétique sont en retard sur le champ auxiliaire.

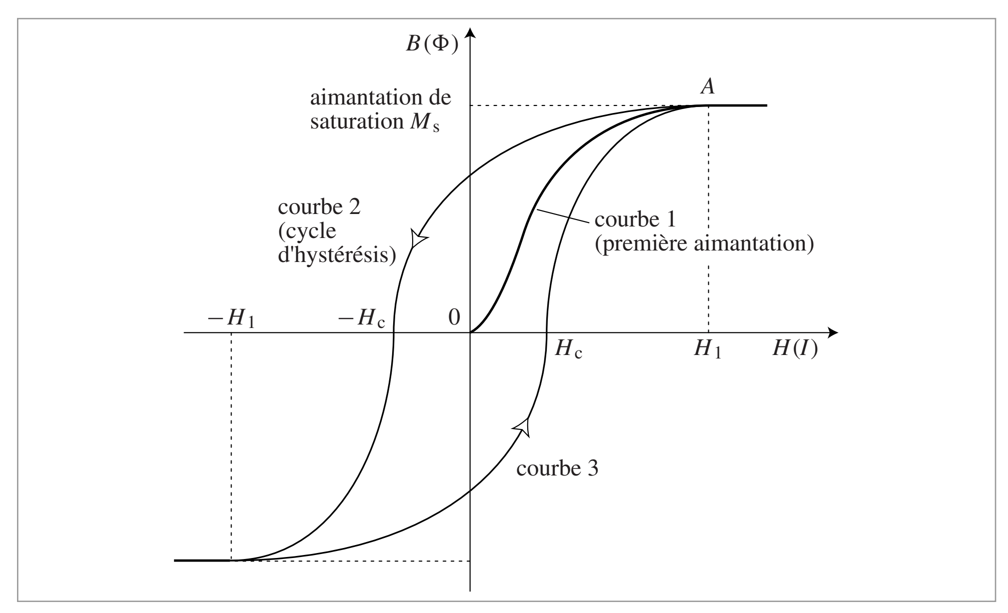


Fig. 12.6. Courbes d'hystérésis.

La forme du cycle, caractérisée par l'aimantation de saturation M_s, le champ coercitif $\vec{H}_c$ et le champ auxiliaire $\vec{H}_1$, varie d'un matériau à l'autre. Pour le fer pur (dit fer doux), ce cycle est très étroit alors que l'aimantation rémanente est très intense (beaucoup plus grande que celle observée dans les substances paramagnétiques, de l'ordre de 0,1 T). En revanche pour les aciers, l'aimantation rémanente sera plus faible et les champs coercitifs très grands. Pour un matériau non ferromagnétique, on obtient la courbe : $B = \mu_0 H$ ou $B = \mu_0 \mu_r H$ avec $\mu_r \simeq 1$.

Au delà de cet aspect purement descriptif, comment peut-on comprendre ces phénomènes d'hystérésis et de première aimantation observés dans la phase ferromagnétique ? En fait l'alignement des moments magnétiques attendu dans un ferromagnétique ne se fait pas à l'échelle macroscopique dans tout le volume. Le matériau s'organise en effet en domaines de dimensions micrométriques séparés par des parois (fig. 12.7).

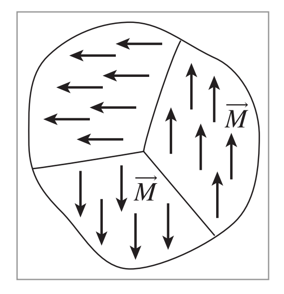


Fig. 12.7.

À l'intérieur de chaque domaine, tous les moments sont parallèles et orientés le long de certaines directions cristallographiques appelées « directions de facile aimantation » ; les différents domaines sont en revanche désorientés les uns par rapport aux autres, les moments contenus dans les parois s'adaptant progressivement d'un domaine à l'autre. C'est ainsi qu'un morceau de fer doux apparaît comme non aimanté. Toutefois, dès qu'un champ auxiliaire $\vec{H}$ est appliqué, les différents domaines vont s'orienter de façon non réversible (phénomène de Barkhausen), l'aimantation et le champ magnétique augmentent. Il s'agit de la courbe de première aimantation.

Si maintenant on supprime progressivement le champ, les domaines ont tendance à se désorienter les uns par rapport aux autres, toutefois la présence de défauts cristallographiques gêne cette réorganisation, qui s'accompagne alors d'un échauffement du matériau, et l'aimantation restera non nulle à champ appliqué nul. L'hystérésis observée rend compte des difficultés rencontrées par le système à redistribuer ses domaines et parois lorsque le champ auxiliaire varie.

Ainsi, on pourra obtenir un champ magnétique important en introduisant un morceau de fer doux dans un solénoïde. Donnons quelques ordres de grandeur. Considérons un tore, identique à celui de la figure 12.5, ayant les caractéristique suivantes $R = 20$ cm, $r = 2$ cm en fer caractérisé par $\mu_r = 10^3$. Un courant de $I = 1$ A parcourant la bobine constituée de $N = 1000$ spires crée un champ auxiliaire, $H = 800$ Am^{-1}, le champ magnétique $B = \mu_0\mu_r H$ est alors d'environ 1 T tandis qu'il serait voisin de 10^{-3} T dans le cas d'un matériau non ferromagnétique. En revanche pour avoir des aimants permanents, il sera préférable d'utiliser des systèmes présentant des champs coercitifs importants ne pouvant pas être détruits par des champ faibles. De tels systèmes sont obtenus par exemple avec des aciers à base de tungstène. Ce comportement caractéristique des matériaux ferromagnétiques disparaît brutalement dès que la température du système est supérieure à une température critique T_c, le matériau présentant alors comme nous l'avons vu des propriétés identiques à celles des matériaux paramagnétiques.

Détermination de $\vec{B}$ et de $\vec{H}$

Revenons maintenant à la détermination de $\vec{B}$ proprement dite. Pour obtenir $\vec{B}$, on va en fait mesurer la tension aux bornes d'une bobine de N' spires enroulée sur le tore ; on sait que lorsque le champ varie, il apparaît dans cette seconde bobine une force électromotrice $\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ où Φ est le flux créé dans la bobine par le champ magnétique $\vec{B}$:

$$\mathcal{E} = -N'S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

Par intégration de $\mathcal{E}$ on obtient $\vec{B}$. Pour obtenir H, on applique le théorème d'Ampère au champ auxiliaire $\vec{H}$, sur la circonférence $l = 2\pi R$ du tore. La condition $r \ll R$ permet de supposer que $\vec{H}$ est constant dans toute la section du tore :

$$\oint_C \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = NI = 2\pi RH$$

$$H = \frac{NI}{2\pi R}$$

Perméabilité relative μ_r

La non linéarité de la relation entre le champ magnétique $\vec{B}$ et le champ auxiliaire $\vec{H}$, en d'autres termes entre le flux Φ et le courant I rend très difficile le calcul d'un coefficient d'auto-inductance en présence d'un noyau ferromagnétique. Toutefois, pour de faibles excursions de $\vec{H}$ autour de l'origine la relation linéaire $\vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H}$ reste valable, la perméabilité relative μ_r pouvant alors valoir 10^3 à 10^5 suivant les matériaux.

Exercices

1 Quels sont les courants ampériens, la valeur des champs magnétique $\vec{B}$ et auxiliaire $\vec{H}$ en tout point à l'intérieur d'un long tube aimanté uniformément dans une direction parallèle à son axe, dans les deux cas suivants ?

a. Le tube est plein.

b. Le tube est creusé d'une cavité cylindrique de même axe de révolution.

2 Un long fil conducteur rectiligne de rayon a, est entouré d'un long cylindre creux en fer, de rayon intérieur r_i et de rayon extérieur r_e constitué d'un matériau isolant magnétique, de perméabilité χ_m. Trouver le champ auxiliaire $\vec{H}$, le champ magnétique $\vec{B}$, le vecteur aimantation $\vec{M}$ et les courants ampériens dans tout l'espace, le fil étant parcouru par un courant I, parallèlement à son axe dans les cas suivants :

a. $r_i = a$ et r_e est supposé infini (le tube est supposé occuper tout l'espace).

b. $r_i = b > a$ et $r_e = c > b > a$. Quel serait l'effet sur la valeur du champ magnétique à la distance $r > r_e$ si le cylindre de fer était supprimé ?

3 Un barreau cylindrique de longueur l et de rayon R possède une aimantation permanente $\vec{M}$ supposée uniforme et parallèle à l'axe zz' du barreau.

1. Quels sont les courants ampériens surfacique et volumique, équivalents $\vec{j}_e$ et $\vec{J}_e$ dans un tel aimant ?

2. On suppose que la longueur L du barreau est très petite devant son rayon R.

a. Calculer le champ $\vec{B}$ au centre de la pastille. En déduire le module et le sens du champ $\vec{H}$ au même point.
Indice. *On montrera l'équivalence avec une spire circulaire parcourue par un courant.*

b. Donner les expressions des champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$ sur l'axe, à une hauteur $z > \frac{h}{2}$ du centre du disque.

c. Calculer les modules de $\vec{B}$ et $\vec{H}$ au centre si $M = 10^5$ A/m, $h = 1$ mm, $R = 5$ cm.

3. On suppose maintenant que la longueur L du barreau n'est plus négligeable devant son rayon R.

a. Donner l'allure des lignes du champ magnétique $\vec{B}$ dans tout l'espace.

b. Calculer sa valeur en tout point de l'axe ainsi que celle du champ auxiliaire $\vec{H}$ (préciser son sens).

c. Que se passe-t-il pour $\vec{B}$ et $\vec{H}$ aux extrémités du barreau ? Ne pouvait-on pas prévoir ces (dis)continuités ?

d. Pour M donné, comment choisir le barreau pour que B soit le plus grand possible aux extrémités ? Montrer qu'on ne peut pas conserver un aimant court. Évaluer la dimension critique.

4 Selon le modèle de Bohr, un électron en rotation à la vitesse angulaire ω autour d'un noyau équivaut à une spire parcourue par un courant.

1. Exprimer le moment magnétique de cette « spire ». Donner la relation entre le moment magnétique et le moment cinétique orbital de l'électron.
Remarque : En fait pour obtenir la relation entre le moment magnétique $\vec{M}$ d'un atome son moment cinétique orbital $\vec{L}$, il faut aussi tenir compte de la rotation de l'électron sur lui-même et de la contribution des différents électrons d'un atome ; la relation précédente est modifiée : un facteur de proportionnalité supplémentaire g (facteur de Landé compris entre 1 et 2) doit être ajouté.

2. Pour un électron de nombre quantique orbital l, rappeler le nombre de valeurs que peut prendre la composante L_z de $\vec{L}$ sur un axe Oz. Quelle est la valeur du moment cinétique L_z pour l'ensemble des électrons d'une sous couche complète ? En déduire quelles sont les substances qui comportent des moments magnétiques permanents.

5 Lorsqu'on applique un champ magnétique à un atome, les électrons de cet atome acquièrent un mouvement supplémentaire qui tend à s'opposer à l'établissement de ce champ. La substance acquiert une aimantation de direction opposée au champ appliqué.

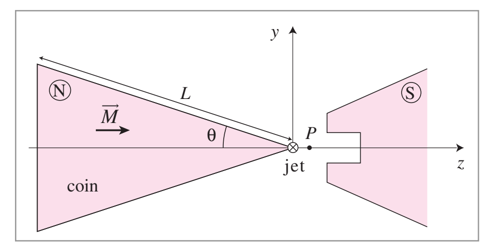
a. Exprimer la force que subit un électron pendant l'établissement du champ magnétique (qu'on supposera uniforme et perpendiculaire à l'orbite de l'électron).

b. On suppose que le rayon de l'orbite de l'électron n'est pas modifié. Quelle est la nouvelle valeur de la vitesse angulaire de l'électron lorsque le champ $\vec{B}$ a atteint sa valeur finale ? Exprimer la différence ω_l entre ces valeurs.

c. De façon générale, on montre que sous l'action d'un champ magnétique, les Z électrons d'un atome acquièrent un mouvement de précession autour de $\vec{B}$ à la vitesse angulaire ω_l.

– Exprimer le moment magnétique correspondant induit dans l'atome (pour cela, on introduira la valeur moyenne du carré du rayon de l'atome).
– En déduire l'expression de la susceptibilité χ_m.
– Calculer un ordre de grandeur de χ_m pour les gaz, pour les liquides et pour les solides.

6 L'expérience de Stern et Gerlach en 1921 a permis une démonstration directe de la quantification spatiale, par déflexion d'atomes d'argent dans un champ magnétique inhomogène. Dans l'entrefer d'un électro-aimant dont l'une des pièces est taillée en forme de coin, la force exercée sur un atome d'un jet d'atomes (neutres) est proportionnelle au gradient de champ magnétique et au moment magnétique de l'atome. Si l'atome possède un moment magnétique, sa trajectoire sera déviée.



Expérience de Stern et Gerlach.

On suppose que le coin, d'angle 2θ et de largeur L faible devant la longueur de l'arête, a une aimantation $\vec{M}$ uniforme et parallèle à Oz. On néglige le champ magnétique créé par les parties autres que le coin.

1. On veut déterminer le champ magnétique $\vec{B}$ en un point P de l'entrefer situé dans le plan horizontal Oxz de l'arête, au niveau du milieu de cette arrête et à une distance très petite z de l'arête.

a. Calculer les courants ampériens circulant dans le coin.

b. Donner la direction du champ magnétique dans l'entrefer en un point de l'axe Oz et son module B.

2. Montrer que $\frac{\partial B}{\partial z}$ est de la forme $\frac{K}{z}$ où K est une constante que l'on calculera.

7 Un solénoïde « infini » de section circulaire comportant n tours de fil par unité de longueur, est parcouru par un courant alternatif de pulsation ω. À l'intérieur du solénoïde, on place un noyau métallique de rayon a, de longueur l, dont l'axe coïncide avec celui du solénoïde. La perméabilité magnétique de ce noyau est μ, sa résistivité ρ.

a. Montrer que des courants sont induits dans le noyau, déterminer la direction de ces courants dits « courants de Foucault ».
Indice. *Utiliser les symétries du problème.*

b. Calculer la puissance dissipée par effet joule dans une couche métallique cylindrique de rayon r et d'épaisseur dr ($0 \leqslant r \leqslant a$) donnée, en négligeant les phénomène d'auto-induction.

c. En déduire la puissance moyenne $\langle p \rangle$ dissipée par effet Joule dans le noyau métallique.

d. Calculer $\langle p \rangle$ si le noyau est un cylindre ($l = 20$ cm, $a = 5$ cm) de fer ($\mu_r = 500$, $\rho = 0,6536 \cdot 10^{-7}$ Ω·m) et si le solénoïde constitué de 1000 spires est parcouru par un courant alternatif d'amplitude $i_0 = 1$ A, de fréquence égale à 10^4 Hz.

e. Montrer, en utilisant le fait que le champ est constant dans tout le solénoïde « infini », qu'en juxtaposant N noyaux cylindres métalliques parallèles de rayon $a \simeq \sqrt{\frac{S}{N\pi}}$ dans la section S du solénoïde, on diminue d'autant plus la puissance dissipée que N est grand et que l'on a toujours intérêt à « feuilleter » les noyaux métalliques pour éviter un échauffement important à haute fréquence, plutôt que d'utiliser un noyau massique.

Chapitre 13

L'énergie magnétique

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'énergie emmagasinée dans un système de circuits parcourus par des courants électriques. La caractérisation de cette énergie est très utile car elle permet dans de nombreux cas de déterminer simplement les forces et moments exercés sur les différents éléments du système, grandeurs qu'il peut être important d'évaluer comme par exemple dans le cas d'un moteur électrique. Après avoir donné l'expression de l'énergie magnétique en fonction des champs magnétique $\vec{B}$ et auxiliaire $\vec{H}$, nous montrerons que cette énergie ne dépend que des courants et des inductances du système. Ces différentes formes permettront de déterminer les expressions des forces et des moments appliqués sur les éléments du système. Enfin, ces expressions et leurs avantages respectifs seront discutés sur l'exemple du moteur universel.

13.1 Énergie magnétique emmagasinée dans une boucle de courant

1 Énergie associée à un système de deux circuits

2 Énergie associée à un ensemble de circuits

13.2 Expression de l'énergie en fonction des champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$

1 En absence de matériaux magnétiques

2 En présence de matériaux magnétiques

3 Contribution des courante ampériens

13.3 Expression de l'énergie en fonction des inductances

1 En absence de matériaux magnétiques

2 En présence de matériaux magnétiques

13.4 Forces et moments de forces

1 Expressions de la force et de son moment

2 Exemples de calcul de force, de moment et d'énergie magnétiques

Mots-clés

- **Énergie magnétique**

13.1. Énergie magnétique emmagasinée dans une boucle de courant

Avant d'établir plus formellement l'expression de l'énergie magnétique associée à un système de circuits parcourus par des courants constants, nous allons commencer par donner une représentation simple de l'énergie magnétique associée à une seule boucle de courant.

Considérons donc un circuit unique alimenté par un générateur de tension établissant à l'instant $t = 0$ une différence de potentiel V à ses bornes. À l'instant initial $t = 0$, il n'y a pas de courant dans le circuit, le système « circuit » est dans un état caractérisé par une énergie que nous définissons comme étant l'énergie nulle. Lorsque la différence de potentiel est établie, il apparaît un courant $I(t)$ dans le circuit. Si nous attendons un temps suffisamment long, le système sera alors en régime stationnaire et l'intensité $I(t)$ pourra être considérée comme constante et égale à I. Le temps caractéristique de l'établissement de ce régime est égal à L/R où L est l'auto-inductance et R la résistance du circuit. Évaluons l'énergie associée à ce nouvel état du système. Lorsque la différence de potentiel V est établie, le courant $I(t)$ qui apparaît dans le circuit crée à son tour un champ magnétique. Ce champ magnétique est variable jusqu'à l'établissement de l'état final stationnaire ($I \approx$ constant) correspondant à un flux magnétique constant à travers le circuit. En vertu des phénomènes d'induction décrits au chapitre 11, il apparaît dans le circuit durant la phase transitoire une force électromotrice associée que nous pourrons décrire à l'aide d'une auto-inductance L. La différence de potentiel V et le courant I sont dans cette situation liés par la relation :

$$V = RI + L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}$$

Pour faire circuler le courant $I(t)$, le générateur fournit la puissance instantanée $VI(t)$; l'énergie correspondante fournie entre les instants 0 et t vaut :

$$\int_0^t VI(t)\,\mathrm{d}t$$

Pendant ce même intervalle de temps, la résistance R dissipe sous forme de chaleur une puissance RI^2 qui correspond entre les instants 0 et t à une énergie égale à :

$$\int_0^t RI^2\,\mathrm{d}t$$

La différence U entre ces deux énergies correspond à l'énergie stockée jusqu'à l'instant t dans le circuit ; elle vaut :

$$\int_0^t (V - RI)I\,\mathrm{d}t = \int_0^t LI\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}LI^2(t)$$

Lorsque le régime stationnaire est atteint, $I(t) = I$, l'énergie de l'état final est alors égale à $\frac{1}{2}LI^2$. Cette énergie représente précisément l'énergie magnétique emmagasinée par un circuit d'auto-inductance L parcouru par un courant constant I. Cette première expression nous montre comment évaluer l'énergie magnétique en fonction des caractéristiques

macroscopiques du circuit ; nous reviendrons au paragraphe 13.3 sur cet aspect dans le cas plus général d'un ensemble de circuits parcourus par des courants, mais pour le moment nous allons donner une autre expression de cette énergie magnétique faisant maintenant apparaître les caractéristiques locales associées à ce circuit.

Nous avons vu au chapitre 11, que par définition de l'auto-inductance, LI est égal au flux magnétique Φ du champ créé par le courant I à travers le circuit. L'énergie magnétique de l'état final peut donc également s'écrire en fonction de I et Φ :

$$U = \frac{1}{2}\Phi I$$

Nous pouvons aller encore au delà en introduisant le potentiel vecteur $\vec{A}$ associé au champ dans la définition du flux Φ :

$$\Phi = \int \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

où $\mathrm{d}\vec{l}$ est un élément de longueur infinitésimal du circuit. L'énergie emmagasinée U s'écrit alors :

$$\frac{1}{2}I \int \vec{A} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

En introduisant l'expression de la densité de courant $\vec{J}$, nous obtenons finalement l'expression de l'énergie emmagasinée uniquement en fonction de $\vec{J}$ et $\vec{A}$:

$$U = \frac{1}{2} \iiint \vec{J} \cdot \vec{A} \, \mathrm{d}\tau$$

Cette énergie magnétique est emmagasinée dans le circuit et sera dissipée sous forme d'une forte étincelle (extra-courant) lorsqu'on ouvrira le dit circuit. Au-delà de ce simple exemple, nous allons montrer maintenant que l'expression précédente établie pour une seule boucle de courant est très générale et peut s'étendre au cas d'un ensemble de circuits parcourus par des courants constants.

1 Énergie associée à un système de deux circuits

Nous allons maintenant calculer l'énergie associée à un ensemble de deux circuits C_1 et C_2 se trouvant dans des positions relatives fixées et parcourus respectivement par les courants constants I_1 et I_2. L'énergie associée à l'état initial « les circuits sont parcourus par des courants nuls et sont infiniment éloignés » sera considérée comme l'origine des énergies. Pour calculer l'énergie associée à l'état du système, il convient au préalable de remarquer qu'elle est indépendante de la façon dont nous avons établi l'état du système, l'énergie finale sera la même si, par exemple, nous établissons les courants dans les circuits quand ils sont infiniment éloignés pour les rapprocher ensuite jusqu'à leurs positions finales ou si nous commençons par les rapprocher pour ensuite établir les courants. En effet si nous faisons évoluer les circuits de leur état initial jusqu'à leur état final suivant une procédure donnée pour ensuite les ramener à leur état initial par une autre procédure, l'état de l'univers à la fin de l'opération n'aura pas changé. Nous pouvons donc en conclure que l'énergie échangée entre le système et le reste de l'univers lors du trajet aller sera intégralement restituée lors du trajet retour. L'énergie associée à l'état du système est donc indépendante

de la façon dont a été établi cet état. Nous retrouvons là un raisonnement que nous avons déjà effectué dans le cas de l'électrostatique.

Ce résultat nous permet de choisir la procédure de mise en place du système la plus commode pour calculer l'énergie associée. Considérons donc le protocole suivant : les deux circuits ouverts ($I_1 = I_2 = 0$) sont amenés de l'infini à leurs positions finales. Le circuit C_1 est alors fermé. Le courant s'établit dans le circuit. Conformément au résultat obtenu au paragraphe précédent, l'énergie emmagasinée dans le circuit est égale à :

$$U_1 = \frac{1}{2} \iiint_{C_1} \vec{J}_1(\vec{r}) \cdot \vec{A}_1(\vec{r}) \, \mathrm{d}\tau$$

où $\vec{J}_1(\vec{r})$ et $\vec{A}_1(\vec{r})$ sont respectivement la densité de courant et le potentiel vecteur associés au circuit C_1. Le circuit C_2 est alors fermé à son tour. Pour que le courant s'établisse, il faut que le générateur alimentant le circuit C_2 fournisse l'énergie :

$$U_2 = \frac{1}{2} \iiint_{C_2} \vec{J}_2(\vec{r}) \cdot \vec{A}_2(\vec{r}) \, \mathrm{d}\tau$$

Cette énergie n'est pas la seule à être mise en jeu lorsque le circuit C_2 est fermé. En effet, en s'établissant, le courant I_2 va créer un champ magnétique variable dont la variation de flux dans le circuit C_1 va induire une force électromotrice. Cette f.e.m. a pour valeur instantanée :

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\int_{C_1} \vec{A}_2(t) \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} \right)$$

où $\vec{A}_2(t)$ est le potentiel vecteur associé au champ magnétique crée par le courant circulant dans le circuit C_2. Ainsi, la puissance instantanée que devra fournir le générateur alimentant le circuit C_1 pour maintenir le courant constant devra donc être égale à :

$$P = -\mathcal{E} I_1 = I_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\int_{C_1} \vec{A}_2(t) \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} \right)$$

et l'énergie qui devra être fournie par le générateur alimentant le circuit C_1 est égale à :

$$U_{\text{géné}} = \int_0^T I_1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\int_{C_1} \vec{A}_2(t) \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} \right) \mathrm{d}t$$

où T représente le temps nécessaire à l'établissement de l'état final du système. Cette énergie peut se réécrire :

$$U_{\text{géné}} = I_1 \left(\int_{C_1} \vec{A}_2(t) \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} \right)$$

où $\vec{A}_2$ représente le potentiel vecteur associé au circuit C_2 lorsque le courant est égal à I_2. En utilisant la définition de la densité de courant $\vec{J}_1$, cette dernière expression devient

$$U_{\text{géné}} = \iiint_{C_1} \vec{J}_1(\vec{r}) \cdot \vec{A}_2(\vec{r}) \, \mathrm{d}\tau$$

Nous pouvons maintenant calculer l'énergie totale associée à l'état final du système :

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{C_1} \vec{J}_1(\vec{r})\cdot\vec{A}_1(\vec{r})\,d\tau + \frac{1}{2}\iiint_{C_2} \vec{J}_2(\vec{r})\cdot\vec{A}_2(\vec{r})\,d\tau + \iiint_{C_1} \vec{J}_1(\vec{r})\cdot\vec{A}_2(\vec{r})\,d\tau$$

$$U = \frac{1}{2}\iiint_{C_1} \vec{J}_1(\vec{r})\cdot\vec{A}_1(\vec{r})\,d\tau + \frac{1}{2}\iiint_{C_2} \vec{J}_2(\vec{r})\cdot\vec{A}_2(\vec{r})\,d\tau + \iiint_{C_2} \vec{J}_2(\vec{r})\cdot\vec{A}_1(\vec{r})\,d\tau$$

La dernière équation est justifiée en considérant que bien entendu l'énergie du système doit être la même si nous la calculons en commençant par fermer le circuit C_2 puis le circuit C_1.

2 Énergie associée à un ensemble de circuits

La procédure que nous venons de présenter pour calculer l'énergie associée à deux circuits se généralise aisément à un ensemble de circuits. Amenons tous les circuits de l'infini à leurs positions finales, les circuits restant ouverts puis fermons-les successivement. Comme dans le cas précédent, l'énergie nécessaire à l'établissement du courant dans le circuit C_1 est égale à :

$$U_1 = \frac{1}{2}\iiint_{C_1} \vec{J}_1(\vec{r})\cdot\vec{A}_1(\vec{r})\,d\tau$$

Il en sera de même pour tous les autres circuits C_i. Fermons maintenant le circuit C_2. Nous venons de voir que l'énergie devant être fournie est égale à :

$$\frac{1}{2}\iiint_{C_2} \vec{J}_2(\vec{r})\cdot\vec{A}_2(\vec{r})\,d\tau + \iiint_{C_1} \vec{J}_1(\vec{r})\cdot\vec{A}_2(\vec{r})\,d\tau$$

Le courant établi dans les circuits C_1 et C_2, on ferme le circuit C_3. Pour maintenir constants les courants I_1 et I_2, les générateurs alimentant les circuits C_1 et C_2 devront alors fournir une énergie égale à :

$$\iiint_{C_1} \vec{J}_1(\vec{r})\cdot\vec{A}_3(\vec{r})\,d\tau + \iiint_{C_2} \vec{J}_2(\vec{r})\cdot\vec{A}_3(\vec{r})\,d\tau$$

Cette évaluation des contributions énergétiques se généralise à l'ensemble des fermetures des circuits. En sommant toutes ces contributions, nous obtenons l'énergie associée à l'état correspondant à l'ensemble des circuits C_i parcourus par les courants I_i placés à leurs positions finales. Cette énergie a pour expression :

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i}\iiint_{C_1} \vec{J}_i(\vec{r})\cdot\vec{A}_i(\vec{r})\,d\tau + \frac{1}{2}\sum_{i}\sum_{j\neq i}\iiint_{C_1} \vec{J}_i(\vec{r})\cdot\vec{A}_j(\vec{r})\,d\tau$$

Le coefficient 1/2 dans le dernier membre de cette équation apparaît pour ne tenir compte qu'une seule fois de l'énergie d'interaction entre les circuits. Cette énergie peut se réécrire :

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i}\iiint_{C_i}\vec{J}_i(\vec{r})\cdot\left(\sum_{j}\vec{A}_j(\vec{r})\right)\mathrm{d}\tau$$

$$U = \frac{1}{2}\iiint\vec{J}(\vec{r})\cdot\vec{A}(\vec{r})\,\mathrm{d}\tau \qquad (13.1)$$

Dans cette dernière expression, $\vec{J}(\vec{r})$ est la densité de courant au point $\vec{r}$ définie comme égale à $\vec{J}_i(\vec{r})$ en tout point du circuit C_i et nulle ailleurs, tandis que $\vec{A}(\vec{r})$ est le potentiel vecteur au point $\vec{r}$ créé par l'ensemble de tous les circuits C_i. Avec cette convention, l'intégration se fait sur tout l'espace.

13.2. Expression de l'énergie en fonction des champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$

1 En absence de matériaux magnétiques

En absence de matériaux magnétiques, la densité de courant s'exprime simplement en fonction du champ magnétique $\vec{B}$:

$$\vec{J} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})$$

Nous pouvons, en introduisant cette expression dans la relation 13.1, écrire l'énergie du système de circuits parcourus par les courants uniquement en fonction du champ magnétique :

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\iiint(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\mu_0}\iiint(\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\cdot\vec{B}\,\mathrm{d}\tau \qquad (13.2)$$

$$U = \frac{1}{2\mu_0}\iiint\vec{B}\cdot\vec{B}\,\mathrm{d}\tau$$

Cette équation montre que l'énergie totale associée à un ensemble de circuits parcourus par des courants constants ne dépend que du champ magnétique créé par ces courants en tout point de l'espace. Cette expression de l'énergie en fonction du champ magnétique est importante parce qu'elle est en fait plus générale que l'expression 13.1 ; en particulier elle s'applique également aux cas des champs magnétiques variant au cours du temps tandis que l'expression 13.1 n'est valable que pour des champs constants.

2 En présence de matériaux magnétiques

Lorsque nous avons établi la relation 13.1, nous avons clairement identifié la densité de courants $\vec{J}$ et le potentiel vecteur $\vec{A}$: $\vec{J}$ correspond aux courants circulant dans les

boucles tandis que $\vec{A}$ correspond au potentiel vecteur créé en tout point de l'espace. En absence de matériaux magnétiques les courants $\vec{J}$ et les sources du potentiel vecteur sont confondus ; en présence de matériaux magnétiques ce n'est plus le cas. En effet, alors que $\vec{J}$ ne prendra en compte que les courants $\vec{J}_{\text{lib}}$ circulant réellement dans les boucles, le potentiel vecteur sera lui créé non seulement par ces courants $\vec{J}_{\text{lib}}$ mais également par les courants ampériens $\vec{J}_{\text{amp}}$. Par définition nous avons donc :

$$U = \frac{1}{2}\iiint \vec{J}_{\text{lib}} \cdot \vec{A}\,\mathrm{d}\tau$$

Cette expression peut maintenant s'exprimer en fonction du champ auxiliaire $\vec{H}$. En introduisant comme au paragraphe précédent $\vec{B} = \vec{\nabla} \wedge \vec{A}$ et la relation $\vec{J}_{\text{lib}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{H}$, nous obtenons :

$$U = \frac{1}{2}\iiint (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \cdot \vec{A}\,\mathrm{d}\tau = \frac{1}{2}\iiint (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \vec{H}\,\mathrm{d}\tau$$

$$U = \frac{1}{2}\iiint (\vec{B} \cdot \vec{H})\,\mathrm{d}\tau \qquad (13.3)$$

Dans le cas où l'aimantation est simplement proportionnelle au champ magnétique, $\vec{B} = \mu\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H}$, nous obtenons alors :

$$U = \frac{\mu_0\mu_r}{2}\iiint \vec{H} \cdot \vec{H}\,\mathrm{d}\tau$$

3 Contribution des courante ampériens

Comparons maintenant les énergies de deux systèmes constitués des mêmes circuits, parcourus par les mêmes courants, mais l'un contenant de la matière magnétique, l'autre pas. La différence des énergies associées à chacun de ces systèmes est égale à :

$$\Delta U = \frac{1}{2\mu_0}\iiint \vec{B} \cdot \vec{B}\,\mathrm{d}\tau - \frac{1}{2}\iiint \vec{H} \cdot \vec{B}\,\mathrm{d}\tau$$

$$\Delta U = \frac{1}{2}\iiint (\vec{B} - \mu_0\vec{H}) \cdot \vec{B}\,\mathrm{d}\tau$$

Au chapitre précédent, nous avons vu que les courants ampériens pouvaient s'exprimer en fonction des champs $\vec{B}$ et $\vec{H}$:

$$\vec{J}_{\text{amp}} = \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla} \wedge (\vec{B} - \mu_0\vec{H})$$

En introduisant cette relation dans l'expression de ΔU, nous remarquons que cette différence d'énergie s'exprime simplement en fonction des courants ampériens :

$$\Delta U = \frac{1}{2}\iiint \vec{J}_{\text{amp}} \cdot \vec{A}\,\mathrm{d}\tau$$

Nous pouvons avoir une idée encore plus simple de l'origine de cette énergie en introduisant la définition des courants ampériens : $\vec{J}_{\text{amp}} = \vec{\nabla} \wedge \vec{M}$. Nous pouvons alors exprimer

cette différence d'énergie directement en fonction de l'aimantation $\vec{M}$ du système :

$$\Delta U = \frac{1}{2} \iiint \vec{M} \cdot \vec{B} \, \mathrm{d}\tau \qquad (13.4)$$

Ce résultat est la généralisation de celui que nous avions obtenu dans le cas de deux circuits. Lorsque l'aimantation est proportionnelle au champ magnétique, propriété que nous exprimons par une relation liant le champ auxiliaire $\vec{H}$ et l'aimantation, $\vec{M} = \chi \vec{H}$, nous obtenons alors :

$$\Delta U = \frac{1}{2} \iiint \chi \vec{H} . \vec{B} \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2\mu_0} \iiint \frac{\chi}{1+\chi} \vec{H} \cdot \vec{H} \, \mathrm{d}\tau$$

Dans les deux cas, cette énergie est simplement celle associée à l'interaction des dipôles magnétiques (induits ou permanents) contenus dans les matériaux magnétiques soumis au champ $\vec{B}$. Ainsi l'énergie emmagasinée, potentiellement disponible, dans un système de circuits parcourus par des courants en présence de matériaux magnétiques est simplement égale à l'énergie qui serait emmagasinée dans les mêmes conditions en absence de matériaux magnétiques diminuée de l'énergie nécessaire au couplage entre l'aimantation de ces matériaux et du champ magnétique.

13.3. Expression de l'énergie en fonction des inductances

Comme nous l'avait suggéré notre présentation de l'énergie magnétique au paragraphe 13.1, les différentes énergies que nous venons d'étudier peuvent également être exprimées en fonction des auto-inductances et inductances mutuelles décrites au chapitre 11.

1 En absence de matériaux magnétiques

Considérons comme précédemment un ensemble de circuits $\mathrm{C_i}$, parcourus par des courants constants I_i. En absence de matériaux magnétiques, l'énergie du système est la somme des énergies propres nécessaires à l'établissement des courants et de l'énergie d'interaction entre circuits. Exprimons chacune de ces contributions en fonction des coefficients d'inductance M_ij et d'auto-inductance L_i associés aux différents éléments de ce système. L'énergie d'interaction entre les circuits $\mathrm{C_i}$ et $\mathrm{C_j}$ a pour expression :

$$\begin{aligned} U &= I_\mathrm{i} \oint \vec{A}_\mathrm{j} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} \\ &= I_\mathrm{i} \iint \vec{\nabla} \wedge \vec{A}_\mathrm{j} \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} \\ &= I_\mathrm{i} \iint \vec{B}_\mathrm{j} \cdot \vec{n} \, \mathrm{d}S \end{aligned}$$

où $\mathrm{d}S$ et $\vec{n}$ sont respectivement un élément infinitésimal de surface s'appuyant sur le circuit C_i et la normale à cet élément. En introduisant les définitions du flux magnétique et des inductances, nous pouvons réécrire cette énergie sous la forme :

$$U = I_i \Phi_{ij} = M_{ij} I_i I_j$$

En sommant toutes ces contributions en prenant soin de ne pas compter deux fois la même énergie d'interaction, nous obtenons la contribution des interactions entre circuits à l'énergie du système :

$$U_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} I_i \Phi_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} M_{ij} I_i I_j$$

Examinons maintenant l'énergie propre U_i associée au circuit C_i qui est égale par définition à :

$$U_i = \frac{1}{2} \iint \vec{J}_i \cdot \vec{A}_i \, \mathrm{d}\tau$$

dans laquelle $\vec{A}_i$ est, par construction, le potentiel vecteur créé par la densité de courant $\vec{J}_i$ circulant dans la boucle. Nous avons donc :

$$U_i = \frac{1}{2} \iiint \vec{J}_i \cdot \vec{A}_i \, \mathrm{d}\tau = \frac{1}{2} I_i \int \vec{A}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}_i$$

Or par définition des flux, $\int \vec{A}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}_i$ correspond précisément au flux Φ_{ii} du champ créé par C_i à travers lui-même. En introduisant la définition de l'auto-inductance L_i, $\Phi_{ii} = L_i I_i$, nous obtenons pour l'énergie propre du circuit C_i :

$$U_i = \frac{1}{2} L_i I_i^2$$

Nous obtenons ainsi l'expression générale de l'énergie du système associée aux courants libres circulant dans un ensemble de circuits sous la forme :

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i,j} I_i \Phi_{ij}$$

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i} L_i I_i^2 + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} M_{ij} I_i I_j \tag{13.5}$$

2 En présence de matériaux magnétiques

Dans le cas d'un système dans lequel chaque circuit est dans un environnement magnétique caractérisé par une susceptibilité χ_i, l'expression 13.5 de l'énergie du système demeure valable à condition de modifier les coefficients d'inductance. Calculons par exemple l'énergie propre associée à un circuit immergé dans un milieu magnétique. Par définition, cette énergie est égale à :

$$U_i = \frac{1}{2} L I_{lib}^2$$

L étant l'auto-inductance en présence de matériau magnétique. Il convient donc de déterminer L en présence d'un matériau magnétique. Par définition l'énergie U_i est égale à :

$$U_i = \frac{1}{2}\iiint \vec{J}_{\text{lib}} \cdot \vec{A}_i \, d\tau = \frac{1}{2} I_{\text{lib}} \int \vec{A}_i \cdot d\vec{l} = \frac{1}{2} I_{\text{lib}} \iint \vec{B}_i \cdot d\vec{S}$$

En présence d'un matériau magnétique que nous supposerons linéaire et homogène, $\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$, nous pouvons donc écrire :

$$U_i = \frac{\mu_r}{2} I_{\text{lib}} \iint \mu_0 \vec{H}_i \cdot d\vec{S}$$

Or cette dernière intégrale est précisément égale au flux du champ magnétique créé par le courant I_{lib} en absence de matériau magnétique. En introduisant le coefficient d'auto-inductance correspondant L_0, nous obtenons :

$$U_i = \frac{1}{2}\mu_r L_0 I_{\text{lib}}^2$$

Nous voyons donc que la présence d'un matériau magnétique revient simplement à remplacer l'auto-inductance L_0 par l'auto-inductance L :

$$L = \mu_r L_0 \tag{13.6}$$

L'énergie d'interaction entre deux circuits C_i et C_j est donnée par définition par :

$$U_{ij} = \iiint \vec{J}_{i\,\text{lib}} \cdot \vec{A}_j \, d\tau = I_i \int \vec{A}_j \cdot d\vec{l}_i$$

En introduisant la définition de $\vec{A}_j$ en fonction des courants libres dans le circuit j, on obtient :

$$U_{ij} = (1 + \chi_i)(1 + \chi_j) I_i I_j M_{0ij} = \mu_{r_i} \mu_{r_j} M_{0ij} I_i I_j$$

$$U_{ij} = M_{ij} I_i I_j \tag{13.7}$$

Nous voyons qu'il suffit dans ce cas de multiplier l'inductance dans le vide par le produit des coefficients de permittivité relative. L'énergie totale du système s'écrit donc :

$$U = \frac{1}{2}\sum_i L_i I_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} M_{ij} I_i I_j$$

$$U = \frac{1}{2}\sum_i \mu_{r_i} L_{0i} I_i^2 + \frac{1}{2}\sum_{i \neq j} \mu_{r_i} \mu_{r_j} M_{0ij} I_i I_j$$

13.4. Forces et moments de forces

Après avoir calculé les expressions de l'énergie magnétique dans différents systèmes, nous allons maintenant en déduire celles des forces et de leurs moments.

1 Expressions de la force et de son moment

Pour calculer les forces et les moments de forces dans des systèmes en présence de champs magnétiques, nous allons utiliser le principe des travaux virtuels. Comme en électrostatique, il sera très important de préciser les conditions dans lesquelles s'effectuent ces déplacements infinitésimaux virtuels, en distinguant les déplacements se faisant à flux constant (équivalents de ceux à charges constantes) de ceux s'effectuant à courants constants (équivalents de ceux à potentiel constant). De manière générale, l'énergie libre est toujours égale au produit d'une variable intensive et d'une variable extensive. En électrostatique, la variable intensive est le potentiel tandis que la variable extensive est la charge du système. En magnétostatique, ces variables seront respectivement le flux à travers le circuit et le courant parcourant le circuit.

À « flux constants »

Nous considérons ici des déplacements virtuels tels que le flux total traversant un circuit reste constant. Il n'est pas très facile de concevoir physiquement de telles transformations, sauf en utilisant des anneaux supraconducteurs parcourus par des courants permanents. On se convainc aisément dans ce cas que les générateurs ne fournissent aucun travail, puisqu'il n'y a pas de générateurs... D'après le principe des travaux virtuels, les expressions de la force et du moment de forces sont respectivement égales à :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}l}\frac{\mathrm{d}\vec{l}}{\mathrm{d}l} \\ \Gamma &= -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta} \end{aligned} \tag{13.8}$$

Calculons par exemple la variation d'énergie $\mathrm{d}U$ d'un système constitué de deux circuits C_1 et C_2 pour un tel processus. Les générateurs n'intervenant pas, l'énergie U du système s'écrit :

$$U = \frac{1}{2}I_1(\Phi_{11} + \Phi_{12}) + \frac{1}{2}I_2(\Phi_{22} + \Phi_{21})$$

avec, par hypothèse :

$$\begin{aligned} \Phi_{11} + \Phi_{12} &= L_1 I_1 + M_{12} I_2 = \text{Cte} \\ \Phi_{22} + \Phi_{21} &= L_2 I_2 + M_{21} I_1 = \text{Cte} \end{aligned} \tag{13.9}$$

Calculons dans ces conditions la variation infinitésimale $\mathrm{d}U$ d'énergie associée à un déplacement virtuel :

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2}(\Phi_{11} + \Phi_{12})\,\mathrm{d}I_1 + \frac{1}{2}(\Phi_{22} + \Phi_{21})\,\mathrm{d}I_2 \tag{13.10}$$

Mais les conditions 13.9 imposent une relation entre $\mathrm{d}I_1$ et $\mathrm{d}I_2$:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\Phi_{11} + \Phi_{12}) &= \mathrm{d}(L_1 I_1 + M_{12} I_2) = L_1\,\mathrm{d}I_1 + I_2\,\mathrm{d}M_{12} + M_{12}\,\mathrm{d}I_2 = 0 \\ \mathrm{d}(\Phi_{22} + \Phi_{21}) &= \mathrm{d}(L_2 1_2 + M_{21} I_1) = L_2\,\mathrm{d}I_2 + I_1\,\mathrm{d}M_{21} + M_{21}\,\mathrm{d}I_1 = 0 \end{aligned}$$

En multipliant ces deux équations respectivement par I_1 et I_2 puis, en les sommant, nous obtenons :

$$L_1 I_1 \, \mathrm{d}I_1 + I_2 I_1 \, \mathrm{d}M_{12} + M_{12} I_1 \, \mathrm{d}I_2 + L_2 I_2 \, \mathrm{d}I_2 + I_1 I_2 \, \mathrm{d}M_{21} + M_{21} I_2 \, \mathrm{d}I_1 = 0$$
$$(\Phi_{11} + \Phi_{12}) \, \mathrm{d}I_1 + (\Phi_{22} + \Phi_{21}) \, \mathrm{d}I_2 + I_1 I_2 \, \mathrm{d}M_{12} + I_1 I_2 \, \mathrm{d}M_{21} = 0$$

En introduisant la variation d'énergie $\mathrm{d}U$ donnée par l'expression 13.10 et en profitant de l'égalité $M_{12} = M_{21}$, nous obtenons :

$$\mathrm{d}U = -I_2 I_1 \, \mathrm{d}M_{12}$$

d'où les expressions de la force et du moment :

$$F_x = I_1 I_2 \frac{\partial M_{12}}{\partial x}$$
$$\Gamma = I_1 I_2 \frac{\partial M_{12}}{\partial \theta}$$

Cette variation d'énergie correspond précisément à la variation de l'énergie mécanique que nous avons introduite au début du chapitre, validant ainsi les expressions 13.8. Ce résultat se généralise sans difficultés à un système constitué de plus de deux circuits.

À « courants constants »

Dans le cas d'un déplacement virtuel à « courants constants », on doit prendre en compte non seulement les énergies échangées par les circuits mais également les travaux effectués par les générateurs pour maintenir les courants constants dans les circuits. Il convient donc d'étudier les variations d'énergie du système constitué par les circuits et leurs générateurs. La variation d'énergie associée aux circuits s'écrit :

$$\mathrm{d}U = \frac{1}{2} I_1 \mathrm{d}(\Phi_{11} + \Phi_{12}) + \frac{1}{2} I_2 \mathrm{d}(\Phi_{22} + \Phi_{21})$$

mais

$$\mathrm{d}(\Phi_{11} + \Phi_{12}) = \mathrm{d}(L_1 I_1 + M_{12} I_2) = I_2 \, \mathrm{d}M_{12}$$
$$\mathrm{d}(\Phi_{22} + \Phi_{21}) = \mathrm{d}(L_2 I_2 + M_{21} I_1) = I_1 \, \mathrm{d}M_{21}$$

puisque l'auto-inductance L_i et les courants I_i sont constants. Nous obtenons ainsi :

$$\mathrm{d}U = I_2 I_1 \, \mathrm{d}M_{12}$$

D'autre part, lorsque l'on déplace les deux circuits l'un par rapport à l'autre, les générateurs fournissent au cours du déplacement des travaux qui peuvent être calculés simplement. Considérons tout d'abord la variation du flux Φ_{21} du champ magnétique créé par le circuit C_2 dans le circuit C_1. Cette variation de flux induit dans le circuit C_1 une force électromotrice :

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} = -I_2 \frac{\mathrm{d}M_{21}}{\mathrm{d}t}$$

Le générateur alimentant le circuit C_1 doit donc fournir un travail égal à :

$$\int_0^{\delta t} I_1 \frac{\mathrm{d}\Phi_{21}}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t = I_1 I_2 \int_0^{\delta t} \frac{\mathrm{d}M_{21}}{\mathrm{d}t} \, \mathrm{d}t = I_1 I_2 \, \mathrm{d}M_{21}$$

où δt est la durée du déplacement. De façon similaire, le travail fourni par le générateur alimentant le circuit C_2 s'écrit :

$$I_1 I_2 \, dM_{12} = I_1 I_2 \, dM_{21}$$

Au total, la variation d'énergie du système « circuits et générateurs » s'écrit :

$$dW = dU - I_1 I_2 \, dM_{12} - I_1 I_2 \, dM_{12} = -I_1 I_2 \, dM_{12} = -dU$$

Les forces et les moments sont donc donnés par les relations :

$$\vec{F} = -\frac{dW}{dl}\frac{d\vec{l}}{dl} = \frac{dU}{dl}\frac{d\vec{l}}{dl}$$
$$\Gamma = -\frac{dW}{d\theta} = \frac{dU}{d\theta}$$

2 Exemples de calcul de force, de moment et d'énergie magnétiques

Force et moment s'exerçant sur une spire

Considérons une spire de rayon a, parcourue par un courant constant I, tournant autour d'un axe Ox et placée dans un champ constant $\vec{B}$ (fig. 13.1).

Commençons par donner l'expression de l'énergie potentielle de cette spire en utilisant le résultat qui vient juste d'être obtenu. On peut considérer la spire comme située à l'intérieur d'un très grand solénoïde parcouru par un courant constant. La position de la spire est repérée par l'angle θ que fait son axe avec le champ magnétique $\vec{B}$. Lors d'une rotation infinitésimale $d\theta$ de la spire, la variation de son énergie $dW = -I_1 I_2 \, dM_{12} = -I_1 \, d\Phi_{12}$ fait intervenir la variation $d\Phi$ du flux qui la traverse, qu'on peut écrire $d\Phi = d(BS\cos\theta) = d(\vec{B}\cdot\vec{S})$.

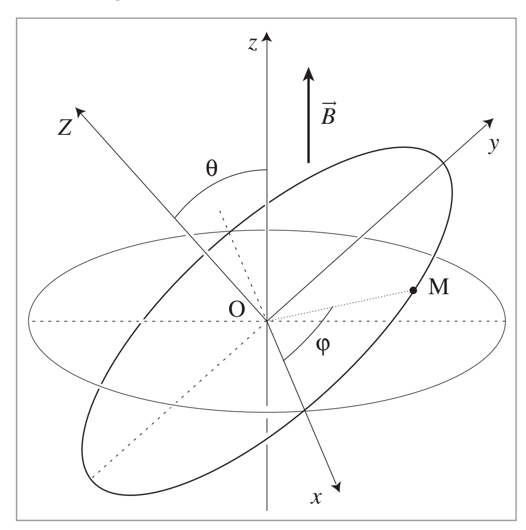


Fig. 13.1. Spire mobile dans un champ magnétique constant.

De l'expression $dW = -I d(\vec{B}\cdot\vec{S}) = -d(\vec{B}\cdot I\vec{S}) = -d(\vec{m}\cdot\vec{S})$, en désignant par $\vec{m} = I\vec{S}$ le moment magnétique de la spire, on tire par intégration la valeur de l'énergie potentielle de la spire, et par extension celle de tout moment magnétique constant $\vec{m}$ placé dans le champ $\vec{B}$:

$$W = -\vec{m}\cdot\vec{B}$$

Nous pouvons évaluer les forces et le moment des forces appliquées sur cette spire en utilisant la définition des forces magnétiques décrites au chapitre 9. En vertu de la loi de Laplace, l'élément $d\vec{l}$ situé au point M de la spire est soumis à la force :

$$d\vec{F} = I\,d\vec{l}\wedge\vec{B}$$

La somme de toutes ces contributions ramenées au centre de la spire est nulle (pour s'en convaincre, il suffit de considérer la somme des forces appliquées sur deux éléments de la spire diamétralement opposés). En revanche ces forces induisent un moment de forces sur la spire. En effet, au point O, chaque contribution crée un moment infinitésimal :

$$\mathrm{d}\vec{\Gamma} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \mathrm{d}\vec{F} = I\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge (\mathrm{d}\vec{l} \wedge \vec{B})$$

En utilisant l'expression du double produit vectoriel, on obtient :

$$\mathrm{d}\vec{\Gamma} = I\,\mathrm{d}\vec{l}(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \vec{B}) - \vec{B}(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \mathrm{d}\vec{l}) = I\,\mathrm{d}\vec{l}(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \cdot \vec{B})$$

le second terme étant nul puisque le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est perpendiculaire à l'élément $\mathrm{d}\vec{l}$. Calculons explicitement ce moment. Nous avons dans le référentiel $(\mathrm{O}, \vec{u}_{\mathrm{x}}, \vec{u}_{\mathrm{y}}, \vec{u}_{\mathrm{z}})$ de la spire :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = a\cos\varphi\,\vec{u}_{\mathrm{x}} + a\sin\varphi\,\vec{u}_{\mathrm{y}}$$
$$\vec{B} = B(\sin\theta\,\vec{u}_{\mathrm{y}} + \cos\theta\,\vec{u}_{\mathrm{z}})$$

L'élément infinitésimal $\mathrm{d}\vec{l}$ étant égal à :

$$\mathrm{d}\vec{l} = a\,\mathrm{d}\varphi(-\sin\varphi\,\vec{u}_{\mathrm{x}} + \cos\varphi\,\vec{u}_{\mathrm{y}})$$

le moment total $\vec{\Gamma}$ s'écrit sous la forme :

$$\vec{\Gamma} = a^2 IB\sin\theta\left(\vec{u}_{\mathrm{x}}\int_0^{2\pi} -\sin^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi + \vec{u}_{\mathrm{y}}\int_0^{2\pi}\sin\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi\right)$$

Dans cette expression, la seconde intégrale est nulle tandis que la première vaut $-\pi$. Nous obtenons ainsi un moment de module égal à :

$$\Gamma = \pi a^2 IB\sin\theta$$

Revenons maintenant aux définitions de la force et du moment données par les relations 13.8. L'énergie magnétique du système considéré est comme nous l'avons vu égale à $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$ où $\vec{m}$ est le moment magnétique associé à la spire, égal à $\pi a^2 I\,\vec{u}_{\mathrm{z}}$. Elle peut donc s'écrire :

$$U = -\pi a^2 IB\cos\theta$$

Le champ et le courant étant uniformes, cette énergie est indépendante de la position de la spire, la force totale appliquée est nulle. Pour ce qui est du module du moment associé, nous avons :

$$\Gamma = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}\theta} = \pi a^2 IB\sin\theta$$

Comme il se doit, nous retrouvons là l'expression obtenue par le calcul direct. La spire sera soumise à un couple qui tend à maintenir le moment magnétique associé à la spire parallèle au champ magnétique appliqué $\vec{B}$.

Ce principe est utilisé pour fabriquer un moteur élémentaire. Supposons qu'à l'instant initial, le champ appliqué et le moment de la spire soient alignés et que l'on inverse le sens du courant dans la spire, la spire qui était à l'équilibre se trouve brutalement dans sa position de plus haute énergie, elle va tourner pour perdre mécaniquement l'énergie $2\vec{m}B$. Supposons de plus, que le courant qui alimente la spire 1 provienne du générateur par l'intermédiaire de deux demi-cylindres sur lesquels s'appuient des balais. À chaque demi tour, la spire 1, emportée par son inertie, dépasse sa position d'équilibre, le sens du courant s'inversant alors dans la spire. Le couple associé aux forces magnétiques garde

ainsi constamment le même signe et la spire continue à tourner sous l'influence de ce couple moteur permanent.

L'énergie disponible mécaniquement est égale à $2mB$ par demi-tour, soit une puissance mécanique fournie par la spire de $4mBn$, si la spire effectue n tours par seconde. Pour maintenir constant le courant dans la spire, le générateur l'alimentant doit fournir une puissance strictement égale $4mBn$. Ceci serait donc équivalent à un moteur de rendement de 100 %. En fait, nous n'avons pas tenu compte de la dissipation par effet Joule et des pertes d'énergie qui en résultent.

Calcul de l'énergie dissipée le long d'un cycle d'hystérésis

Reprenons le tore décrit dans le chapitre 12 (fig. 12.5) pour calculer l'énergie dissipée dans le cycle présenté sur la figure 12.6.

Revenons à la mesure proprement dite de $\vec{B}$. Pour obtenir $\vec{B}$, on va en fait mesurer la tension aux bornes d'une bobine de N' spires enroulée sur le tore ; on sait que lorsque le champ varie, il apparaît dans cette seconde bobine une force électromotrice $\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ où Φ est le flux créé dans la bobine par le champ magnétique $\vec{B}$:

$$\mathcal{E} = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -N'S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

Par intégration de $\mathcal{E}$, on obtient B. Pour obtenir H, on applique le théorème d'Ampère au champ auxiliaire $\vec{H}$, sur la circonférence $l = 2\pi R$ du tore. La condition $r \ll R$ permet de supposer que $\vec{H}$ est constant dans toute la section du tore :

$$\oint_{C} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = NI = 2\pi RH$$

$$H = \frac{NI}{2\pi R}$$

La puissance fournie par le générateur de courant alimentant la première bobine s'écrit :

$$\frac{\mathrm{d}W_{\text{géné}}}{\mathrm{d}t} = I\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = IN'S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{N'}{N}\frac{NI}{2\pi R}2\pi RS\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t} = \frac{N'}{N}Hv\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$$

où v est le volume du tore. Si $N = N'$, on a :

$$\mathrm{d}W_{\text{géné}} = Hv\,\mathrm{d}B$$

Sur un cycle complet, on trouve :

$$W_{\text{géné}} = v\oint_{C} H\,\mathrm{d}B$$

c'est-à-dire la surface à l'intérieur de la courbe d'hystérésis. Cette énergie est fournie par le générateur et puisque sur un cycle fermé l'état magnétique final est identique à l'état initial, cette énergie ne peut être dissipée que sous forme de chaleur.

Exercices

1 Un « câble coaxial » est formé de deux cylindres coaxiaux creux sans épaisseur de rayons a et b, séparés par un diélectrique de permittivité relative ε_r. Des courants de mêmes intensités mais de sens opposés circulent dans les deux cylindres.

a. Calculer le coefficient d'auto-induction Λ par unité de longueur du câble, à partir de l'énergie électrique emmagasinée dans le câble.

b. En admettant que les surfaces en regard portent des charges $+\lambda$ et $-\lambda$ par unité de longueur, calculer la capacité Γ par unité de longueur de ce câble à partir de l'énergie magnétique emmagasinée dans le câble.

c. Exprimer le produit $\Lambda\Gamma$; quelle est sa dimension ?

2 [Force exercée par un champ magnétique inhomogène]

a. Utiliser l'expression de l'énergie potentielle d'un dipôle magnétique $\vec{m}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ pour calculer les composantes de la force subie par ce dipôle si le champ est inhomogène.

b. En déduire l'expression de la force subie par un volume élémentaire de matière magnétique, de susceptibilité χ_m, dans un champ inhomogène.
Un petit cylindre allongé est placé entre les pôles tronconiques d'un électroaimant et peut pivoter librement autour d'un axe perpendiculaire à l'axe des pôles et passant par son milieu. Discuter la position d'équilibre du barreau selon que le matériau dont est constitué le cylindre est dia ou paramagnétique. Que se passe-t-il si les pièces polaires sont planes ?

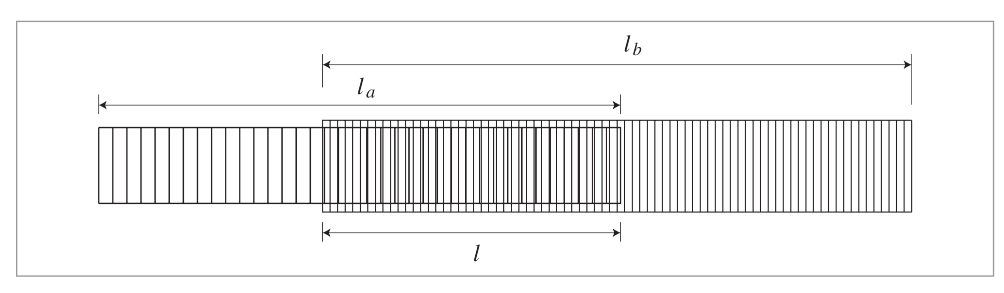
3 Deux solénoïdes coaxiaux a et b longs et fins (leurs longueurs l_a et l_b sont grandes devant leurs rayons) sont parcourus par les courants I_a et I_b circulant dans le même sens et sont emboîtés l'un dans l'autre d'une longueur l (figure ci-dessous). Pour simplifier, on suppose qu'ils ont presque même rayon r et on néglige les effets de bord.

a. Donner les coefficients de self induction L_a et L_b, et la mutuelle M_{ab} si les deux solénoïdes ont respectivement n'_a et n' spires par unité de longueur.

b. Donner l'énergie magnétique du système et sa variation si on déplace l'un des solénoïdes par rapport à l'autre de dl, en maintenant constants les courants I_a et I_b. Expliquer pourquoi on doit fournir de l'énergie pour maintenir constants ces courants et calculer le travail que doivent fournir les sources S_a et S_b. En déduire le travail mécanique fourni par la force d'interaction F_{ab} entre les solénoïdes. Cette force d'interaction est-elle attractive ou répulsive ?

c. Retrouver cette force à partir de l'expression $\mathrm{d}W_m = \frac{1}{2\mu_0}B^2\,\mathrm{d}\tau$.

d. On déplace maintenant de dl l'un des solénoïdes par rapport à l'autre, en maintenant constants les flux. Calculer le travail fourni par les sources S_a et S_b pour maintenir constants ces flux. En déduire le signe de la variation d'énergie magnétique au cours du déplacement.



Deux solénoïdes emboîtés.

Chapitre 14

Applications du magnétisme

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques systèmes exploitant les propriétés de matériaux magnétiques.

14.1 Étude de quelques circuits magnétiques

1 L'électroaimant

2 Notion de réluctance - Loi d'Hopkinson

3 Circuits magnétiques en courant alternatif

14.2 Les transformateurs

1 Transformateur idéal

2 Transformateur réel

14.3 Les moteurs électriques

1 Un moteur élémentaire

2 Moteurs à champ tournant

Mots-clés

• **Électroaimant** • **Transformateur** • **Moteur électrique**

14.1. Étude de quelques circuits magnétiques

1 L'électroaimant

Un électroaimant est un instrument permettant de créer des champs magnétiques intenses et, si possible, homogènes dans un domaine limité de l'espace. Il est formé d'une carcasse ferromagnétique présentant un entrefer l_e, c'est-à-dire une rupture du circuit magnétique, dans lequel se développera le champ magnétique recherché (fig. 14.1).

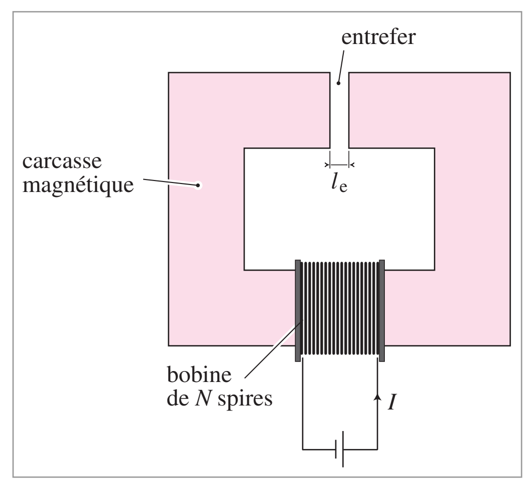


Fig. 14.1. Schéma d'un électroaimant.

Sur la carcasse de longueur l_f, est enroulée une bobine constituée de N spires parcourues par un courant I. Dans la suite les indices e et f seront respectivement associés aux grandeurs dans l'entrefer et dans la carcasse. On suppose ici le circuit magnétique de section constante, et l'entrefer l_e très étroit par rapport aux dimensions de la section. Connaissant I, N et la courbe d'hystérésis du matériau, calculons le champ magnétique $\vec{B}$ dans l'entrefer.

On dispose pour ce faire des éléments suivants :

– le théorème d'Ampère appliqué au champ auxiliaire $\vec{H}$:

$$l_e H_e + l_f H_f = NI \qquad (14.1)$$

– la relation $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ qui entraîne la continuité de la composante normale de $\vec{B}$ à l'entrefer :

$$B_e = B_f \qquad (14.2)$$

– dans l'entrefer :

$$B_e = \mu_0 H_e \qquad (14.3)$$

et la courbe d'hystérésis qui donne $B(H)$ dans la carcasse (fig. 14.2)

Les relations 14.1 et 14.3 conduisent à l'équation :

$$l_e \frac{B_e}{\mu_0} + l_f H_f = NI$$

En utilisant maintenant la relation 14.2, on a donc le champ dans l'entrefer :

$$B_e = B_f = \frac{\mu_0 NI}{l_e} - \mu_0 \frac{l_f}{l_e} H_f$$

Dans le graphe $B(H)$, de la figure 14.2, cette fonction est représentée par une droite de pente $-\mu_0 \frac{l_f}{l_e}$.

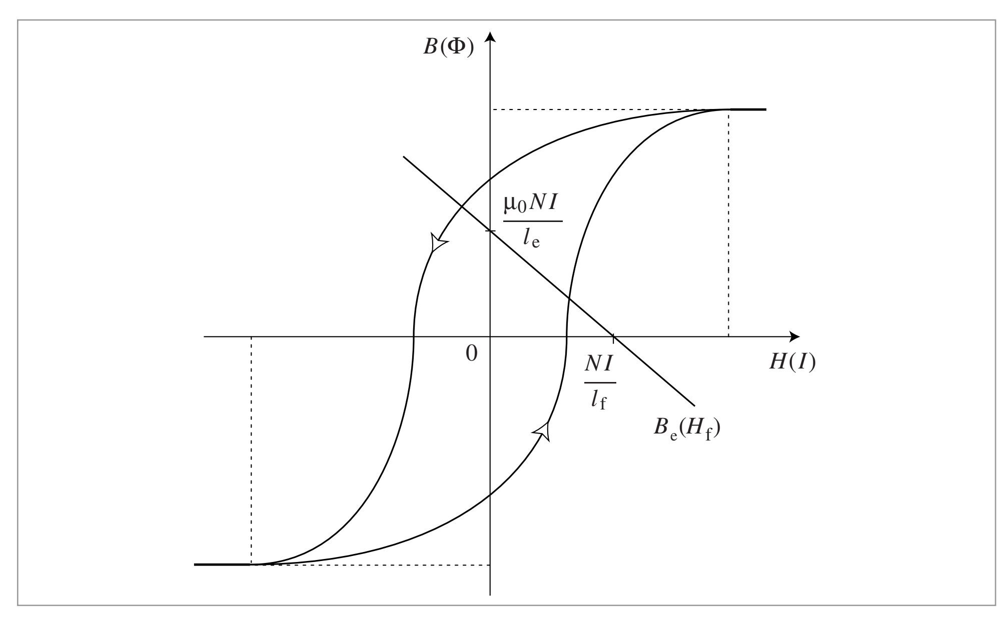


Fig. 14.2. Courbe d'hystérésis.

On voit qu'en fonction de l'histoire antérieure du système, il y a 0 ou 2 solutions. En particulier en courant nul, il existe une solution qui correspond à une valeur non nulle de B, avec H de sens opposé à B. Un tel champ auxiliaire porte le nom de champ démagnétisant.

Le champ à l'intérieur d'un tore avec entrefer est inférieur à celui du même tore sans entrefer. Rappelons que pour un tore sans entrefer de longueur l, on a $B_0 = \mu_0\mu_r\frac{NI}{l}$. Si $l_e \ll l_f$, on peut identifier l à l_f et exprimer B_f et B_e en fonction de B_0. En effet, dans le cas d'une faible hystérésis, on peut écrire $B_f = \mu_0\mu_r H_f$ et l'expression de B_f précédente, devient :

$$B_f = \frac{\mu_0 NI}{l_e} - \frac{l_f}{l_e}\frac{B_f}{\mu_r}$$

$$B_f = B_e = \frac{\mu_0\mu_r NI}{l_f} \times \frac{1}{1 + \mu_r\frac{l_e}{l_f}} \simeq B_0 \times \frac{1}{1 + \mu_r\frac{l_e}{l_f}}$$

Cette expression nous montre que, dans un électroaimant, à courant donné, le champ est d'autant plus faible que l'entrefer est large.

Par exemple, pour un tore en fer ($\mu_r = 10^3$) de rayon $R = 20$ cm, d'entrefer $l_e = 7$ cm sur lequel sont entourées 1000 spires parcourues par un courant de 1 A, on a $B_e = 0,116\,B_0$.

Cet effet peut se comprendre en considérant que lorsque deux pôles opposés apparaissent sur les pièces polaires, ils créent à l'intérieur de l'électro-aimant un champ magnétique de sens opposé à celui qui leur a donné naissance, appelé « champ démagnétisant », qui se déduit du champ inducteur, aboutissant au résultat qu'on vient de voir.

2 Notion de réluctance - Loi d'Hopkinson

Considérons maintenant un circuit contenant n portions de sections différentes $A_1, \ldots, A_n$. La conservation du flux ($\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$) s'écrit :

$$\Phi = B_{f1}A_1 = B_{f2}A_2 = B_{fe}A_e$$

Comme précédemment, on a :

$$\begin{aligned} NI &= l_e H_e + l_f H_f = l_e H_e + \sum l_{fi} H_{fi} \\ &= \frac{l_e}{\mu_0} B_e + \sum \frac{l_{fi} B_{fi}}{\mu} = B_e A_e \left(\frac{l_e}{\mu_0 A_e} + \sum \frac{l_{fi}}{\mu A_{fi}} \right) \end{aligned}$$

Cette expression se transforme en :

$$\Phi = B_e A_e = \frac{NI}{\frac{l_e}{\mu_0 A_e} + \sum \frac{l_{fi}}{\mu A_{fi}}}$$

relation qui constitue la loi d'Hopkinson. La quantité NI porte le nom de force magnétomotrice du circuit, chaque terme du dénominateur s'appelant la réluctance $\mathcal{R}_i$ de la portion correspondante du circuit. La force magnétomotrice est égale au produit du flux par la réluctance du circuit :

$$\Phi = \frac{NI}{\sum \frac{l_i}{\mu_i A_i}} = \frac{NI}{\sum \mathcal{R}_i}$$

Les réluctances s'ajoutent dans un circuit magnétique de la même manière que les résistances dans un circuit électrique. Il est à remarquer que l'on peut comparer cette relation à celle que nous obtiendrions en appliquant la loi d'Ohm à un système de même géométrie que celui-ci, dont chaque section serait caractérisée par une résistivité ρ_i :

$$I = \frac{V}{\sum \frac{\rho_i l_i}{A_i}}$$

Toutefois, dans un circuit magnétique μ_r n'excède pas 10^3-10^4, ce qui fait que la perméabilité magnétique des matériaux magnétiques utilisés, dits « noyaux », bien que très grande, n'est pas infiniment plus grande que celle de l'air. Le matériau et l'air diffèrent, du point de vue des propriétés magnétiques, bien moins qu'ils ne le font du point de vue des propriétés de transport du courant puisque la conductivité électrique des métaux est 10^{15} supérieure à celle de l'air. Il y a donc des fuites magnétiques qu'on ne peut ignorer, exactement comme il y aurait des fuites électriques dans un circuit immergé dans l'eau.

3 Circuits magnétiques en courant alternatif

Les circuits magnétiques présentant une hystérésis et des fuites magnétiques ne sont plus équivalents à de simples auto-inductances. Pour s'en convaincre, cherchons l'expression du coefficient d'autoinductance d'un circuit de réluctance $\mathcal{R}$ entouré d'un bobinage de N spires.

Si Φ est le flux qui traverse une spire de la bobine, le flux traversant le bobinage est, s'il n'y a pas de pertes :

$$\Phi_t = N\Phi \quad \text{et} \quad L = \frac{\Phi_t}{I} = \frac{N\Phi}{I}$$

En utilisant la relation d'Hopkinson, on peut écrire :

$$\Phi = \frac{NI}{\mathcal{R}} \quad \text{et} \quad L = \frac{N^2}{\mathcal{R}}$$

En présence de fuites, le flux traversant le bobinage peut s'écrire :

$$\Phi_t = N\Phi + N\Phi_f \quad \text{et} \quad L_t = \frac{N\Phi}{I} + \frac{N\Phi_f}{I} = \frac{N^2}{\mathcal{R}_i} + \frac{N^2}{\mathcal{R}_f}$$

Cette expression est valable même si le terme $\mathcal{R}_f$, représentant la réluctance du circuit de fuite, n'est pas calculable de façon simple.

14.2. Les transformateurs

Comme nous l'avons mentionné au chapitre 11, un transformateur permet de réduire ou d'augmenter une tension électrique appliquée à un circuit. Il comprend au moins deux enroulements situés sur le même circuit magnétique, couplés aussi complètement que possible l'un à l'autre (fig. 14.3). Un transformateur idéal est caractérisé par des enroulements sans résistance, par un circuit sans fuite et un noyau magnétique sans hystérésis avec un μ_r infini, donc une réluctance nulle. On peut donc schématiser un transformateur comme la somme d'un transformateur idéal et d'éléments complémentaires qui seront des résistances et des auto-inductances de fuite partielle.

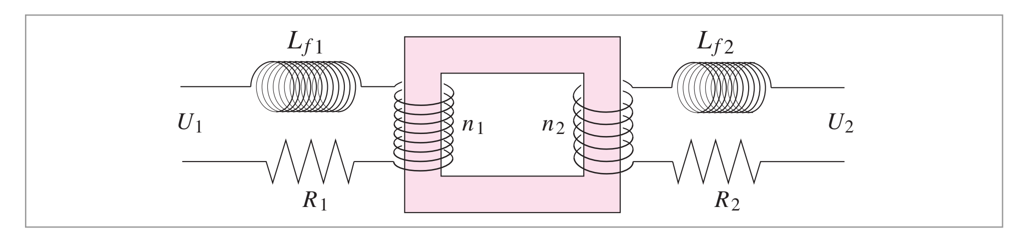


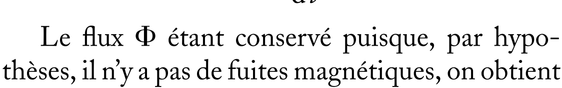
Fig. 14.3. Schéma d'un transformateur.

Si une différence de potentiel sinusoïdale $U_1 = V_{1M}e^{j\omega t}$ est appliquée aux bornes du primaire indicé par 1, celui-ci est traversé par un courant alternatif (on rappelle que cette notation, introduite pour simplifier les calculs ultérieurs, signifie par convention que $U_1 = \mathcal{R}e(V_{1M}e^{j\omega t}) = V_{1M}\cos\omega t$) qui crée dans le circuit un flux variable Φ. Celui-ci engendre dans le secondaire une f.e.m. induite de même fréquence que la source et utilisable pour alimenter un récepteur d'impédance complexe Z_2. On dit que le transformateur est une machine à flux forcé.

1 Transformateur idéal

Dans un transformateur idéal, on supposera nulles la réluctance du circuit magnétique, les résistances des enroulements R_1 et R_2 et les auto-inductances de fuite L_{f1} et L_{f2}. Le flux Φ créé par le circuit primaire se retrouve donc intégralement « transmis » au circuit secondaire.

Ce flux Φ crée dans le primaire une force électromotrice $\mathcal{E}_1$ égale à $-n_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ avec les conventions de signes indiquées sur la figure 14.4. Puisque la résistance des enroulements est nulle (fig. 14.5), nous obtenons simplement la relation entre la tension appliquée U_1 et le flux Φ :



$$U_1 = -\mathcal{E}_1 = n_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = n_1 j\omega\,\mathrm{d}\Phi$$

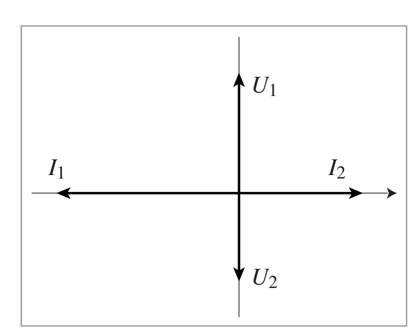


Fig. 14.4.

Le flux Φ étant conservé puisque, par hypothèses, il n'y a pas de fuites magnétiques, on obtient aux bornes du circuit secondaire une relation équivalente :

$$-n_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = U_2 = -n_2 j\omega\Phi$$

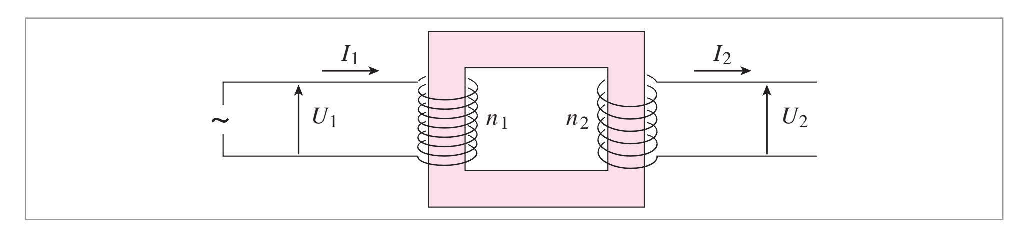


Fig. 14.5.

Le rapport des tensions $\frac{U_1}{U_2}$ est donc égal au rapport des nombres de spires dans les enroulements :

$$\frac{U_1}{U_2} = -\frac{n_1}{n_2} = -\frac{1}{m} \tag{14.4}$$

On peut également calculer le rapport des intensités I_1 et I_2 circulant respectivement dans les circuits primaire et secondaire. Il suffit d'écrire le flux Φ sous la forme :

$$\Phi = \frac{n_1 I_1 + n_2 1_2}{\mathcal{R}}$$

et de remarquer que l'hypothèse d'une réluctance $\mathcal{R}$ nulle impose la relation :

$$n_1 I_1 + n_2 I_2 = 0$$

Nous obtenons ainsi :

$$\frac{I_1}{I_2} = -\frac{n_1}{n_2} = -\frac{1}{m} \tag{14.5}$$

Nous pouvons constater à l'aide des relations 14.4 et 14.5 que, tandis que les tensions et intensités sont modifiées, la puissance électrique fournie se conserve :

$$P = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(U_1 I_1^*) = \frac{1}{2}\mathcal{R}e(U_2 I_2^*)$$

Ce dernier résultat souligne l'intérêt d'utiliser un transformateur de cette nature pour réduire une tension. En effet, l'utilisation d'une résistance électrique aurait pu également provoquer une chute de tension mais les pertes par effets joule auraient entraîné une perte de puissance.

2 Transformateur réel

Le fonctionnement d'un transformateur réel doit prendre en compte l'existence de résistances dans les enroulements, de pertes magnétiques qui font que seule une partie du flux créé au primaire traverse le secondaire, et du fait que le matériau ferromagnétique décrit une courbe d'hystérésis à chaque cycle de la tension alternative. L'importance technologique, industrielle et économique de ces facteurs est considérable, mais les développements auxquels ils donnent lieu sortent du cadre de cet ouvrage. On se contentera d'une description qualitative de ce fonctionnement.

Dans un transformateur réel, on doit tenir compte des résistances R_1 et R_2 et des auto-inductances de fuite L_{f1} et L_{f2}. Les tensions qu'on mesure, U_1 et U_2 s'écrivent alors :

$$U_1 = R_1 I_1 + jL_{f1}\,\omega I_1 - U_1'$$

$$U_2 = -R_2 I_2 - jL_{f2}\omega I_2 + U_2'$$

U_1' et U_2' sont les tensions fictives du transformateur idéal correspondant, avec :

$$U_1' = -n_1\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

$$U_2' = -n_2\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

et

$$\frac{U_1'}{U_2'} = -m$$

Les flux de fuite étant pris en considération dans les auto-inductances L_{f1} et L_{f2}, c'est le même flux Φ qui intervient dans U_1' et U_2'.

Lorsque le circuit secondaire est ouvert, il passe un courant I_0 dans le circuit primaire. D'après la définition de la réluctance, on a :

$$\Phi = \frac{n_1 I_0}{\mathcal{R}} = \frac{U_1}{n_1 j\omega}$$

$$I_0 = \frac{\mathcal{R}\Phi}{n_1} = \frac{\mathcal{R}U_1}{j\omega n_1^2} = \frac{\mathcal{R}V_{1M}}{\omega n_1^2} j\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)$$

La présence du facteur $-j$ signifie que le courant à vide I_0 est en quadrature sur la tension. Il est en général faible ; il est sinusoïdal si la réluctance $\mathcal{R}$ reste constante. Mais comme celle-ci dépend de μ_r qui varie si le champ auxiliaire $H = n_1 I_0$ est important (c'est-à-dire

si n_1 est grand), I_0 n'est pas sinusoïdal si la tension d'alimentation du circuit est très élevée. On peut observer cette déformation, due à l'hystérésis du matériau constituant la carcasse, aux bornes d'une résistance ajoutée sur le circuit primaire.

En charge (secondaire connecté sur une impédance Z) il passe un courant I_1 dans le primaire et I_2 dans le secondaire. On peut écrire :

$$\Phi = \frac{n_1 I_1 + n_2 I_2}{\mathcal{R}}$$

Le flux Φ ne dépend que de U_1. Il est indépendant des courants qui circulent dans les enroulements, donc :

$$\frac{n_1 I_0}{R} = \frac{n_1 I_1 + n_2 I_2}{R} \Rightarrow I_1 - I_0 = -\frac{1}{m} I_2$$

Comme le courant à vide est faible, on trouve $I_1 \approx -\frac{1}{m} I_2$ et on retrouve :

$$\frac{I_1}{I_2} \approx \frac{U_2}{U_1} = -\frac{1}{m}$$

14.3. Les moteurs électriques

Tous les moteurs électriques fonctionnent sur le même principe de base : la partie mobile (rotor) porte un moment magnétique et la partie fixe (stator) engendre un champ magnétique qui n'est jamais aligné avec le moment du rotor. Il en résulte un couple qui fait tourner le rotor et délivre un travail. Toute la variété des moteurs repose sur les différentes méthodes développées pour maintenir un angle entre champ et moment, malgré la rotation du moment.

1 Un moteur élémentaire

On a calculé au chapitre 13, le couple qui s'exerce sur une spire de moment magnétique $\vec{M}$ parcourue par un courant et située dans un champ magnétique homogène $\vec{B}$ et on a introduit de façon élémentaire le principe de la « commutation », qui permet de retourner le moment du rotor chaque fois qu'il va être aligné avec le champ du stator. On va rappeler brièvement ici ce principe.

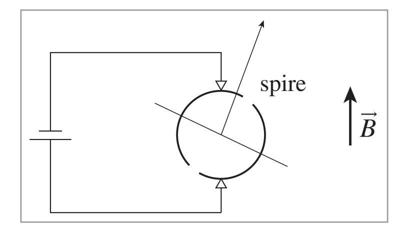


Fig. 14.6.

Le courant qui alimente la spire vue sur la figure 14.6 en perspective provient du générateur par l'intermédiaire des deux demi-cylindres sur lesquels s'appuient deux « balais ». À chaque demi-tour, le sens du courant s'inverse dans la spire, ce qui retourne son moment magnétique. Le couple moteur qui en résulte garde ainsi constamment le même signe et le moteur tourne.

Supposons qu'au moment où $\vec{B}$ et $\vec{M}$ sont alignés (minimum de l'énergie potentielle), on inverse le sens du courant, ce qui ramène l'énergie potentielle à sa valeur maximum. La

boucle va tourner et perdre $2MB$ d'énergie potentielle par demi-tour, soit $4MB$ par tour. Si la spire fait ainsi n tours par minute, la puissance mécanique fournie vaudra $4MBn$. Nous avons construit un moteur. Retrouvons ce résultat en exploitant les résultats que nous connaissons déjà. Nous avions vu que la valeur instantanée du couple moteur de la spire tournante vaut $\Gamma(\theta) = MB\,|\sin\theta|$, moment qui fournit la puissance instantanée à l'axe :

$$\Gamma\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = MB\,|\sin\theta|\,\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

En écrivant que la vitesse de rotation constante de la spire est caractérisée par la vitesse angulaire $\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega = 2\pi n$, on obtient une puissance moyenne de la forme :

$$\overline{\Gamma\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}} = \mathrm{M}B\omega\,\left|\overline{\sin\theta}\right|$$

Par définition, la valeur moyenne $|\overline{\sin\theta}|$ vaut $\frac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{2}{\pi}$. En remplaçant, on retrouve bien la valeur précédente de la puissance du moteur.

Dans le meilleur des cas, celui d'un moteur sans pertes par effet Joule dans la spire qui aurait un rendement de 100 %, pour maintenir le courant I constant, le générateur doit fournir la puissance moyenne égale à la puissance motrice du moteur : $P_{\mathrm{m}} = 4MBn$ Toutefois, si le générateur dispose d'une f.e.m. e, il ne pourra fournir de puissance que tant que e sera supérieur à la force contre-électromotrice $\mathcal{E}$ induite dans le rotor, qui croît avec la vitesse de rotation suivant la relation $\mathcal{E} = 4\Phi_0 n$, où est Φ_0 le flux maximum qui traverse la spire.

Lorsque $\mathcal{E}$ atteindra $4\Phi_0 n$, l'égalité sera atteinte et le générateur ne pourra fournir plus de puissance, ce qui donne, pour un $\mathcal{E}$ donné, la condition de vitesse maximum de rotation : $n = e/4\Phi_0$. Cette relation montre en particulier qu'on peut augmenter la vitesse en diminuant Φ_0.

Ce genre de moteur est extrêmement utilisé dans toutes les applications fonctionnant en courant continu, comme par exemple les modèles réduits ou les lecteurs de cassettes portables. Dans ces moteurs, la spire unique alimentée par un collecteur à deux électrodes est remplacée par un ensemble de bobinages enroulés autour d'un noyau ferromagnétique, décalés angulairement et alimentés par un collecteur ayant un grand nombre de lames.

En général, le champ magnétique fixe est produit par un aimant permanent. On peut aussi le produire par un bobinage parcouru par un courant. Si on connecte en série ce bobinage inducteur et la bobine tournante, on constitue un « moteur universel », fonctionnant aussi bien en courant continu qu'en courant alternatif : en effet, à chaque demi-alternance, le sens du courant s'inverse, donc également le sens du champ inducteur et celui du moment du rotor : champ et moment retrouvent leurs positions respectives et le couple ne change pas.

2 Moteurs à champ tournant

Le moteur à courant continu est caractérisé par un rotor alimenté en courant par l'intermédiaire d'un collecteur assurant la commutation, le rôle du stator consistant à fournir un champ magnétique fixe. Il existe d'autres types de moteurs dans lesquels le stator délivre un champ magnétique, dit « champ tournant », dont l'orientation varie au cours du temps.

Le champ tournant

Considérons un système comprenant un stator ferromagnétique et un rotor également ferromagnétique porteur d'un moment magnétique $\vec{M}$ (fig. 14.7). Nous supposerons que le champ magnétique $\vec{B}_0$ créé par ce moment est, dans tout le volume du rotor, parallèle à $\vec{M}$. Nous supposerons en outre que l'espace entre stator et rotor est partout faible, de sorte que dans cet entrefer, le champ est radial. À un instant donné, l'angle de $\vec{M}$ par rapport à une direction origine vaut ωt. Compte tenu de la conservation de la composante normale du champ dans l'entrefer, le champ dans l'entrefer au niveau de l'origine s'écrit :

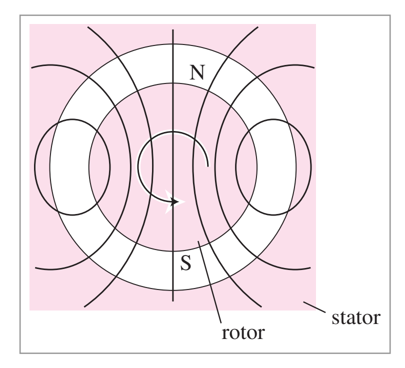


Fig. 14.7.

$$B_0(\mathrm{O}) = B_0 \cos \omega t$$

Pour un point repéré par l'angle α :

$$B(\alpha) = B_0 \cos(\omega t - \alpha)$$

On peut imaginer que le rotor comporte non plus deux pôles mais p paires de pôles (fig. 14.8). On voit que lors d'une rotation de vitesse angulaire ω, un point M de l'entrefer voit défiler les pôles à la pulsation $p\omega$ et le déphasage d'un point situé angulairement à α de M est égal à $p\alpha$. Le champ tournant au point α s'écrit alors :

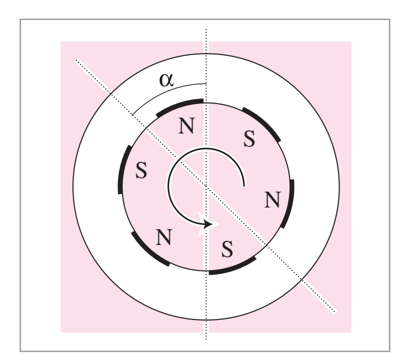


Fig. 14.8.

$$B(\alpha) = B_0 \cos p(\omega t - \alpha) \qquad (14.6)$$

Réalisation de champ tournant

Dans le paragraphe précédent, on a introduit la notion de champ tournant en utilisant le champ créé par un aimant qui tourne. On appellera en général champ tournant, tout champ magnétique décrit en chaque point de l'entrefer par une relation du type 14.6, quel que soit le dispositif utilisé pour l'engendrer. On va examiner quelques-uns des champs tournants les plus employés techniquement. Commençons par le champ dipolaire qui pourra, par exemple, être crée dans l'entrefer d'un électro-aimant alimenté en courant alternatif (fig. 14.9) :

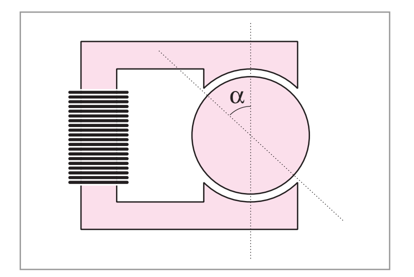


Fig. 14.9.

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= B_0 \cos \omega t \cos \alpha \\ &= \frac{1}{2} B_0 \big(\cos(\omega t + \alpha) + \cos(-\omega t + \alpha)\big) \end{aligned}$$

On a la superposition de deux champs tournant en sens inverse à la pulsation ω.

On peut aussi créer un champ dit « multipolaire ». Il est engendré par trois circuits magnétiques identiques à celui du paragraphe précédent, décalés angulairement de 120° et alimentés sur les trois phases d'une distribution triphasée (fig. 14.10) :

$$B_1 = B_0 \cos \omega t \cos \alpha$$

$$B_2 = B_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\alpha - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$B_3 = B_0 \cos\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right) \cos\left(\alpha - \frac{4\pi}{3}\right)$$

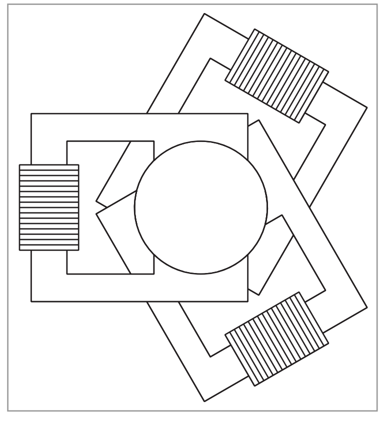


Fig. 14.10.

La superposition de ces trois termes donne d'une part un terme $\frac{3}{2}B_0 \cos(\omega t - \alpha)$, qui correspond à un champ tournant de pulsation ω, d'autre part une somme de trois termes dont on vérifie facilement qu'elle est nulle. Grâce au courant triphasé, on peut donc réaliser facilement des champs tournants. C'est une des principales raisons de son emploi.

Moteurs à champs tournants

On a vu que le principe général des moteurs consistait à maintenir un décalage angulaire entre le champ magnétique du stator et le moment magnétique du rotor. L'utilisation des champs tournants permet d'obtenir ce résultat, suivant deux principes, celui des moteurs synchrones, peu pratiques, et celui des moteurs asynchrones, qui représentent la majorité des moteurs industriels.

Moteurs synchrones et alternateurs

Un stator crée un champ tournant à la vitesse Ω. Le rotor est un dipôle magnétique de moment $\vec{M}$, par exemple un aimant permanent. Soumis au champ $\vec{B}$, il ressent un couple $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = MB \sin \alpha \, \vec{k}$. Si Ω' est la vitesse angulaire du rotor, le module de $\vec{\Gamma}$ s'écrit :

$$\Gamma = \mathrm{M}B_0 \sin\big((\Omega - \Omega')t + \varphi\big)$$

où φ représente le déphasage entre le champ tournant et le rotor. On voit immédiatement que :

$$\overline{\Gamma} = \begin{cases} 0 & \text{si } \Omega \neq \Omega' \\ \mathrm{M}B_0 \sin \varphi & \text{si } \Omega = \Omega' \end{cases}$$

– Si $\sin \varphi > 0$ $(0 < \varphi < \pi)$, le champ du stator est en avance sur celui du rotor, Γ est positif. Le système fournit du travail, c'est un moteur.
La zone de stabilité est celle où $|\Gamma|$ augmente avec $|\varphi|$ (fig. 14.11). Lorsqu'on demande trop d'effort au moteur, Γ augmente ainsi que φ jusqu'à ce que le déphasage atteigne la valeur $\frac{\pi}{2}$. À ce moment le moteur « décroche » d'un tour par rapport au champ tournant

jusqu'à retrouver une zone de stabilité. Le moteur synchrone a besoin, pour démarrer, d'un système auxiliaire qui crée un couple non nul jusqu'à ce que $\Omega = \Omega'$.

– Si $\sin\varphi < 0$ ($0 > \varphi > -\pi$), le couple fournit du travail au système, qui fonctionne alors en générateur et constitue alors un alternateur.

Dans le fonctionnement en alternateur, le champ tournant est engendré par la circulation des courants induits dans le stator par la rotation du moment magnétique du rotor. Ces courants ne circulent que si le générateur est relié à un circuit d'utilisation, mais si l'intensité demandée par l'utilisateur devient trop importante, le phénomène de décrochement se produit comme pour le moteur. Dans un réseau synchronisé comme le réseau E.D.F en France, cette situation serait catastrophique et doit donc être évitée à tout prix.

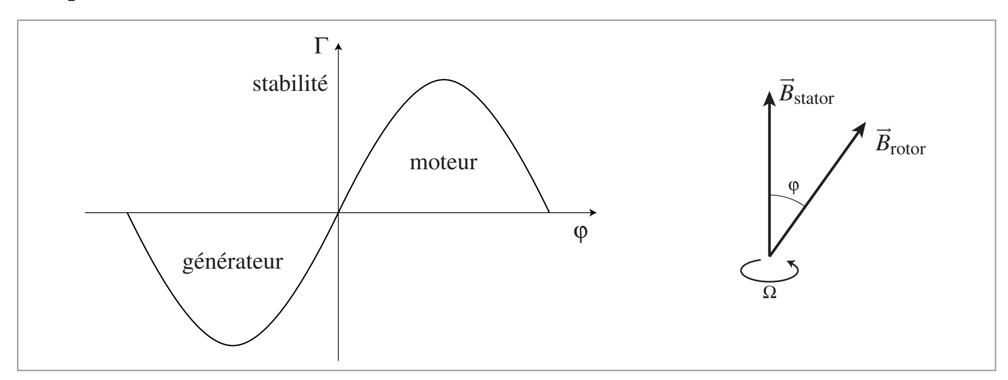


Fig. 14.11.

■ Moteurs asynchrones

Dans ces moteurs, le stator fabrique un champ $\vec{B}_0$ tournant à la vitesse Ω. Le rotor est forme d'une spire en court-circuit tournant à la vitesse $\Omega' < \Omega$. Elle ressent un champ tournant de pulsation $\Omega - \Omega' = \Delta\Omega$ dont la composante normale $B = B_0 \cos \Delta\Omega t$ donne un flux $\Phi(t) = B_0 S \cos \Delta\Omega t$. Celui-ci produit une f.e.m. d'induction $e = -B_0 S \Delta\Omega \sin \Delta\Omega t$.

La spire de résistance R étant en court-circuit, il circule un courant $I = I_0 \sin(\Delta\Omega t - \phi)$ dont une partie I_r est en phase avec e et l'autre I_a en quadrature retard :

$$\begin{aligned}
I_\text{r} &= \frac{B_0 S \Delta\Omega}{R} \sin \Delta\Omega t \\
I_\text{a} &= -\frac{B_0 S \Delta\Omega}{L\Delta\Omega} \cos \Delta\Omega t \\
I_0 &= \frac{B_0 S \Delta\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2 \Delta\Omega^2}} \\
\tan\phi &= \frac{L\Delta\Omega}{R} \\
\cos\phi &= \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2 \Delta\Omega^2}}
\end{aligned}$$

Le moment créé par le courant I est alternatif de pulsation $\Delta\Omega$, c'est donc la somme de deux moments tournant en sens inverse l'un de l'autre par rapport à la spire. Ils sont

entraînés par la spire à la vitesse Ω'. L'un des deux moments tourne donc par rapport au stator à la vitesse :

$$\Omega - \Omega' + \Omega' = \Omega$$

c'est-à-dire à la vitesse du champ tournant. On a bien créé une situation « moteur » puisqu'un moment solidaire du rotor tourne à la même vitesse que le champ tournant, mais avec un déphasage retard donné par $\tan\phi = L\Delta\Omega/R$. Le couple fournit bien de l'énergie mécanique. On retrouve ce résultat en calculant directement le couple :

$$\Gamma = MB\sin(\widehat{\vec{M},\vec{B}}) = SI_0\sin(\Delta\Omega t - \phi)B_0\sin\Delta\Omega t$$

$$\overline{\Gamma} = \frac{SI_0B_0}{2}\overline{\left(\cos\phi - \cos(2\Delta\Omega t - \phi)\right)} = \frac{SI_0B_0}{2}\cos\phi$$

On a :

$$I_0 = \frac{B_0 S\Delta\Omega}{\sqrt{R^2 + L^2\Delta\Omega^2}}$$

$$\cos\phi = \frac{R}{\sqrt{R^2 + L^2\Delta\Omega^2}}$$

$$\overline{\Gamma} = \frac{1}{2}\frac{(B_0S)^2R\Delta\Omega}{R^2 + L^2\Delta\Omega^2}$$

On reconnaît l'allure d'une courbe de résonance (fig. 14.12).

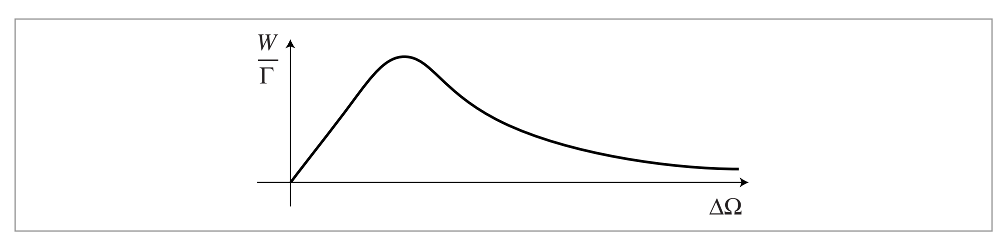


Fig. 14.12.

Au démarrage, $\Omega' = 0$, $\Delta\Omega = \Omega$ et le couple n'est pas nul. Il passe par un maximum pour un certain glissement $\Delta\Omega_0$. Il est stable pour des glissements inférieurs. Si le couple résistant devient trop important, le moteur s'arrête.

Exercices

1 Quelles sont les formes de cycles d'hystérésis les mieux adaptés à :

(1) des appareils à courant alternatif ?

(2) des électroaimants ?

(3) des aimants permanents ?

(4) des appareils électroniques (ex : amplificateurs) ?

2 Soit un tore de rayon moyen b, de section carrée de côté a, fait avec un matériau ferromagnétique de perméabilité relative μ_r, supposée constante dans les conditions d'utilisation ; on bobine, sur la totalité du tore, N tours de fil parcourus par un courant I. On néglige les « fuites magnétiques ».

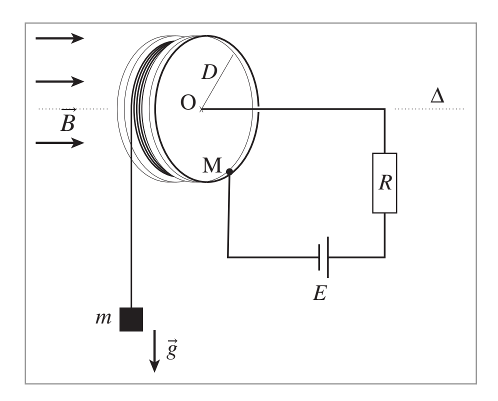
a. Déterminer le champ auxiliaire $\vec{H}$ et le champ magnétique $\vec{B}$ en tout point de l'espace. Montrer que l'inductance L du circuit peut s'écrire en fonction de la réluctance R du circuit par la relation $L = \frac{N^2}{R}$.

b. On pratique dans le tore un entrefer vu du centre O sous un angle α. Déterminer le nouveau champ $\vec{B}_a$ en tout point de l'espace et calculer la nouvelle inductance L' en fonction de la nouvelle réluctance R''.

c. Comparer R' et R'', B, B_a et le champ B_0 que l'on obtiendrait avec un bobinage identique enroulé sur un matériau non ferromagnétique.

d. Calculer numériquement L, L', R', R'', $\frac{B_a}{B}$ et $\frac{B_a}{B_0}$ pour $\mu_r = 10^3$, $R = 5$ cm, $a = 0{,}05$ cm et $\alpha = \frac{\pi}{10}$. Que doit-on faire pour obtenir un champ intense dans l'entrefer ?

3 Un moteur est constitué d'une poulie isolante de centre O et de rayon D, mobile sur un axe horizontal Δ. Un fil conducteur OM est fixé sur la poulie, dans une position radiale. L'extrémité M du fil est en contact électrique avec une boucle métallique fixe de même rayon et de même axe que la poulie. Les points O et M sont reliés aux bornes d'un générateur. La résistance du circuit est R. Le système est placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ perpendiculaire à la poulie.



a. Le système est initialement au repos. Établir la loi de variation de la masse m pendue à l'extrémité d'un corde enroulée autour de la poulie et la valeur du courant en fonction de la vitesse angulaire.

b. On enlève la source de courant. Montrer que ce système est un générateur de courant. Préciser ses caractéristiques quand la vitesse angulaire ω atteint la vitesse limite.

Conclusion

Dans les chapitres précédents, nous avons établi et commenté les différentes équations permettant de rendre compte de l'ensemble des phénomènes électrostatiques et électromagnétiques. Reprenons une à une ces équations.

Il y a tout d'abord l'équation de Coulomb reliant le champ électrique $\vec{E}$ à la densité de charges ρ :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Cette équation, forme locale du théorème de Gauss, montre qu'en électrostatique, seules les charges électriques sont sources de champ électrique. Cette équation est toujours vraie et s'applique aussi bien aux charges en mouvement qu'aux charges statiques.

Les champs magnétiques n'étant quant à eux créés que par des courants et non par des charges magnétiques isolées, ils vérifient l'équation :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

Par ailleurs, les lois décrivant les phénomènes d'induction mis en évidence par Faraday ont montré que les variations temporelles du champ magnétique donnaient naissance à un champ électrique induit décrit par l'équation :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Enfin, les expériences d'Ampère liant l'apparition d'un champ magnétique à la circulation d'un courant électrique stationnaire conduisent à l'équation :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$$

L'ensemble de ces quatre équations permet de décrire tous les phénomènes de l'électromagnétisme dans le vide, pourvu que les distributions de charges et les courants soient stationnaires.

En revanche, dès que les distributions de charges et les courants varient au cours du temps, ces équations doivent être partiellement modifiées, l'équation d'Ampère telle qu'elle est formulée dans le cas de courants stationnaires devenant insuffisante dans le cas général. En effet, si nous calculons la divergence du courant $\vec{J}$ à partir de l'équation d'Ampère, nous obtenons :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \frac{1}{\mu_0} \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \wedge \vec{B}) = 0$$

résultat toujours vrai puisque la divergence de tout rotationnel est nulle. Par ailleurs, la loi de conservation des charges, jamais invalidée expérimentalement et véritable pierre angulaire de l'électromagnétisme, nous indique que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ainsi, lorsque les distributions de charges varient au cours du temps, cette équation de conservation des charges impose à la divergence de $\vec{J}$ d'être non nulle. Ce résultat est en contradiction avec le calcul de la divergence issue de l'équation d'Ampère.

Cette incompatibilité entre l'équation d'Ampère et l'équation de conservation des charges fut mise en évidence par Maxwell. Il proposa alors de modifier l'équation d'Ampère en ajoutant aux courants $\vec{J}$ un second courant, dit « de déplacement », de manière à lever cette incompatibilité. Pour ce faire, Maxwell observa qu'en utilisant l'équation de Coulomb pour exprimer la densité de charges en fonction du champ électrique, il pouvait réécrire l'équation de conservation des charges sous la forme :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial(\vec{\nabla} \cdot \vec{E})}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = 0$$

ce qui lui suggéra de modifier l'équation d'Ampère et de la réécrire :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Ce résultat montre que la variation dans le temps du champ électrique induit l'apparition d'un champ magnétique.

Les phénomènes de l'électromagnétisme dans leur ensemble pouvaient ainsi être décrits en toute généralité à partir de quatre équations appelées équations de Maxwell :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right)$$

Dans le vide, ces équations sont totalement symétriques :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0 \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \qquad \vec{\nabla} \wedge \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Elles permirent à Maxwell de montrer que des ondes électromagnétiques pouvaient se propager, la vitesse de propagation c vérifiant l'équation :

$$c^2 \mu_0 \varepsilon_0 = 1$$

Le champ électromagnétique se propage par les effets superposés de l'induction et du courant déplacement. Si le champ magnétique décroît, il apparaît alors un champ électrique opposé à sa disparition (loi de Faraday) ; à l'inverse si le champ électrique disparaissait, il apparaîtrait dans le même temps un champ magnétique. Ainsi champs magnétiques et champs électriques se soutiennent l'un l'autre et se propagent dans le vide.

À l'époque de Maxwell, on savait mesurer la constante ε_0 et en déduire μ_0. Ainsi, si on prend une unité de charge arbitraire, on peut déterminer ε_0 en mesurant la force entre deux charges unités au repos en utilisant la loi de Coulomb. Ces unités de charges données, on peut définir un courant unité, mesurer la force entre deux circuits parcourus par des courants unité et en déduire μ_0. À partir des données expérimentales, on obtient une vitesse de propagation des ondes électromagnétiques égale à $c = 3 . 10^8$ m/s. Maxwell observa que cette vitesse de propagation de l'onde électromagnétique était celle de la lumière et put conclure que la lumière consistait en la propagation d'une onde électromagnétique. Après Faraday, Oerstedt et Ampère qui avaient unifié et rationnalisé les théories concernant l'électricité et le magnétisme, Maxwell avait franchi une étape supplémentaire en unifiant la lumière à l'électromagnétisme. Mais c'est une autre histoire...

Éléments d'analyse vectorielle

A.1. Les systèmes de coordonnées

1 Les coordonnées cartésiennes

Tout point M peut être repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans un trièdre orthonormé direct de vecteurs de base $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ et de centre O (fig. A.1).

Dans ce système de coordonnées :

- un déplacement élémentaire entre deux points M et M′ est donné par :

$$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{u}_x\,\mathrm{d}x + \vec{u}_y\,\mathrm{d}y + \vec{u}_z\,\mathrm{d}z$$

- le volume élémentaire est égal à :

$$\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

- un vecteur $\vec{A}$ s'écrit en fonction de ses composantes A_x, A_y, A_z :

$$\vec{A} = \vec{u}_x A_x + \vec{u}_y A_y + \vec{u}_z A_z$$

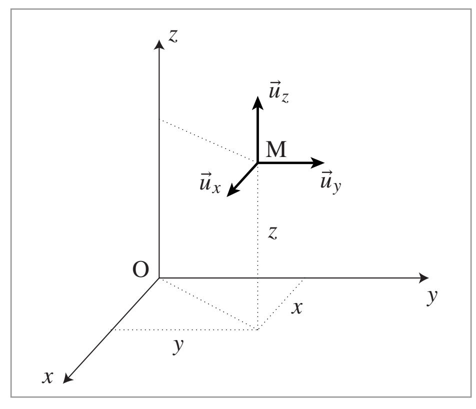


Fig. A.1. Système de coordonnées cartésiennes.

2 Les coordonnées cylindriques

Si le problème est de révolution autour d'un axe, on peut utiliser les coordonnées cylindriques. La position du point M est alors repérée par sa distance ρ à l'axe Oz, sa côte z par rapport au plan xOy et l'angle azimutal θ entre le plan xy et le plan contenant M et l'axe des z (fig. A.2).

Le trièdre local autour du point M est alors le trièdre $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$ tel que :

- $\vec{u}_\rho$ est dans la direction de la perpendiculaire à l'axe des z passant par M.

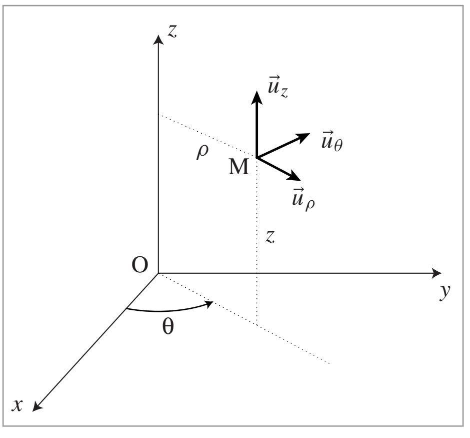


Fig. A.2. Système de coordonnées cylindriques.

- $\vec{u}_\theta$ est perpendiculaire au plan contenant M et l'axe des z, dans le sens des θ croissant.
- $\vec{u}_z$ est dans le sens des z croissants.

Dans ce système de coordonnées :

- un déplacement élémentaire est donné par :

$$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{u}_\rho \,\mathrm{d}\rho + \vec{u}_\theta \,\rho \,\mathrm{d}\theta + \vec{u}_z \,\mathrm{d}z$$

- le volume élémentaire est égal à :

$$\mathrm{d}\tau = \rho \,\mathrm{d}\rho \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}z$$

- un vecteur $\vec{A}$ s'écrit en fonction de ses composantes A_ρ, A_θ, A_z :

$$\vec{A} = \vec{u}_\rho A_\rho + \vec{u}_\theta A_\theta + \vec{u}_z A_z$$

3 Les coordonnées sphériques

Si le problème admet un point O comme centre de symétrie, on utilise les coordonnées sphériques. La position du point M est alors repérée par sa distance r au point O, l'angle θ entre l'axe Oz et le rayon vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et l'angle azimutal φ (fig. A.3).

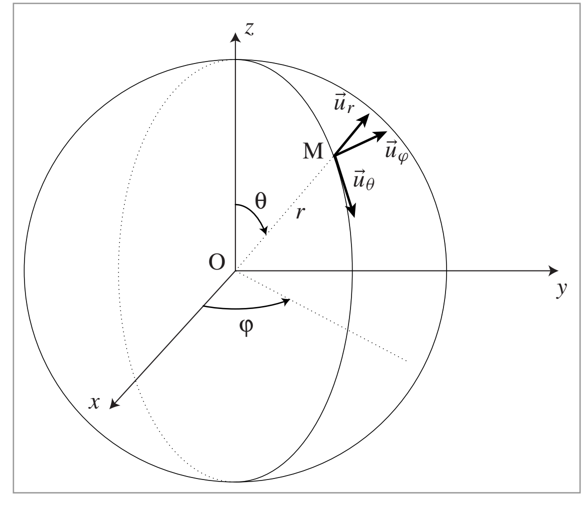


Fig. A.3. Système de coordonnées sphériques.

Le trièdre local autour du point M est alors $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$ et tel que :

- $\vec{u}_r$ est dans la direction du rayon vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.
- $\vec{u}_\theta$, perpendiculaire au rayon vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, est dans le plan contenant le rayon vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et l'axe des z ; il est dirigé dans le sens des θ croissants.
- $\vec{u}_\varphi$, perpendiculaire au plan contenant le rayon vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et l'axe des z, est dirigé dans le sens des φ croissants.

Dans ce système de coordonnées :

- un déplacement élémentaire est donné par :

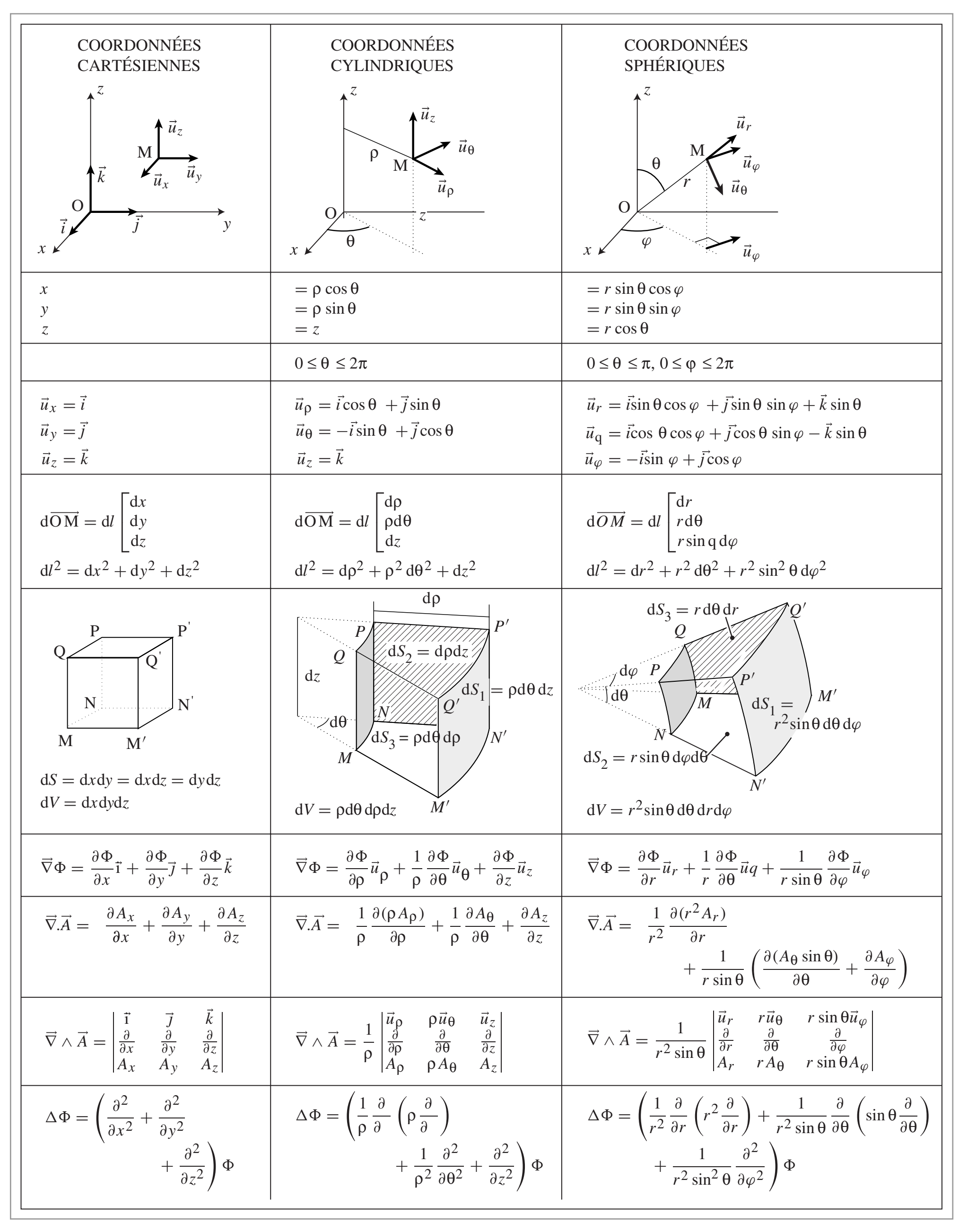
$$\mathrm{d}\vec{l} = \vec{u}_r \,\mathrm{d}r + \vec{u}_\theta r \,\mathrm{d}\theta + \vec{u}_\varphi r \sin\theta \,\mathrm{d}\varphi$$

- le volume élémentaire est égal à :

$$\mathrm{d}\tau = r^2 \sin\theta \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \,\mathrm{d}\varphi$$

- un vecteur $\vec{A}$ s'écrit en fonction de ses composantes A_r, A_θ, A_φ :

$$\vec{A} = \vec{u}_r A_r + \vec{u}_\theta A_\theta + \vec{u}_\varphi A_\varphi$$



COORDONNÉES CARTÉSIENNES	COORDONNÉES CYLINDRIQUES	COORDONNÉES SPHÉRIQUES
x y z	$= \rho \cos\theta$ $= \rho \sin\theta$ $= z$	$= r \sin\theta \cos\varphi$ $= r \sin\theta \sin\varphi$ $= r \cos\theta$
	$0 \leq \theta \leq 2\pi$	$0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi$
$\vec{u}_x = \vec{i}$ $\vec{u}_y = \vec{j}$ $\vec{u}_z = \vec{k}$	$\vec{u}_\rho = \vec{i}\cos\theta + \vec{j}\sin\theta$ $\vec{u}_\theta = -\vec{i}\sin\theta + \vec{j}\cos\theta$ $\vec{u}_z = \vec{k}$	$\vec{u}_r = \vec{i}\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\sin\theta$ $\vec{u}_q = \vec{i}\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta$ $\vec{u}_\varphi = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi$
$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}l \begin{bmatrix} \mathrm{d}x \\ \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix}$ $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$	$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}l \begin{bmatrix} \mathrm{d}\rho \\ \rho\mathrm{d}\theta \\ \mathrm{d}z \end{bmatrix}$ $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}\rho^2 + \rho^2\mathrm{d}\theta^2 + \mathrm{d}z^2$	$\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}l \begin{bmatrix} \mathrm{d}r \\ r\mathrm{d}\theta \\ r\sin q\,\mathrm{d}\varphi \end{bmatrix}$ $\mathrm{d}l^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2$
$\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \mathrm{d}x\mathrm{d}z = \mathrm{d}y\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}S_1 = \rho\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}S_2 = \mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$ $\mathrm{d}S_3 = \rho\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho$ $\mathrm{d}V = \rho\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho\mathrm{d}z$	$\mathrm{d}S_1 = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ $\mathrm{d}S_2 = r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$ $\mathrm{d}S_3 = r\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$ $\mathrm{d}V = r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi$
$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{k}$	$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\vec{u}_z$	$\vec{\nabla}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\vec{u}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\vec{u}q + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\vec{u}_\varphi$
$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$	$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial(A_\theta\sin\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right)$
$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \rho\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\theta & A_z \end{vmatrix}$	$\vec{\nabla}\wedge\vec{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{u}_r & r\vec{u}_\theta & r\sin\theta\vec{u}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}$
$\Delta\Phi = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi$	$\Delta\Phi = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial}\left(\rho\frac{\partial}{\partial}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\Phi$	$\Delta\Phi = \left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)\Phi$

Fig. A.4.

Dans le tableau de la page précédente rassemblant ces trois systèmes de coordonnées, on donne :

- le trièdre *xyz*, le « trièdre local » et les relations qui permettent de passer d'un système à l'autre ;
- les composantes d'un déplacement élémentaire quelconque $d\vec{l}$, la longueur dl de ce déplacement et les différentes surfaces élémentaires ;
- l'expression du gradient et du laplacien d'un scalaire Φ, de la divergence et du rotationnel d'un vecteur $\vec{A}$, notions que nous allons définir dans cette annexe.

A.2. Orientation de l'espace

1 Trièdre direct

Considérons le trièdre formé de trois vecteurs unitaires $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ (fig. A.5).

Le trièdre $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ est direct si, vue de $\vec{u}_z$, la rotation qui amène $\vec{u}_x$ sur $\vec{u}_y$ suivant l'angle inférieur à π se fait dans le sens trigonométrique (inverse du sens des aiguilles d'une montre). Le trièdre de la main droite (pouce, index, majeur) est direct.

Une permutation circulaire des vecteurs conserve l'orientation. Toute transposition et retournement d'un nombre impair de vecteurs inverse l'orientation du trièdre.

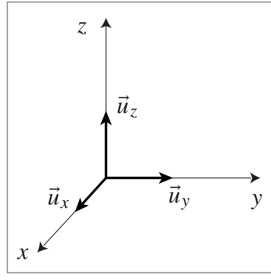


Fig. A.5.

2 Surface orientée

Une surface ouverte est limitée par une courbe fermée dont on peut choisir un sens de parcours (fig. A.6). Ce sens permet d'orienter la surface dans l'espace, puisqu'on peut définir un côté de la surface d'où le sens de parcours est vu comme direct.

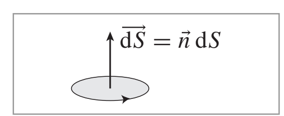


Fig. A.6.

Pour une surface élémentaire, assimilable à son plan tangent, il est courant de définir un vecteur $d\vec{S}$ dont le module est égal à l'aire de la surface élémentaire, dont la direction est celle de la normale à cette surface et dont le sens est directement associé au sens de parcours par la règle dite du « bonhomme d'Ampère » : un observateur, ayant les pieds sur la surface et la tête au niveau de la pointe du vecteur d'orientation, voit tourner la circulation du parcours dans le sens trigonométrique. Pour une surface fermée, on oriente généralement la surface vers l'extérieur.

A.3. Produit de vecteurs

1 Produit scalaire de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

C'est un scalaire noté $\vec{A} \cdot \vec{B}$ tel que :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \cos(\widehat{\vec{A}, \vec{B}})$$

Si $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont orthogonaux. Le produit scalaire est commutatif et distributif :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A} \qquad \text{et} \qquad \vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$$

En coordonnées cartésiennes,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

En coordonnées cylindriques,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_\rho B_\rho + A_\theta B_\theta + A_z B_z$$

En coordonnées sphériques,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_r B_r + A_\theta B_\theta + A_\varphi B_\varphi$$

2 Produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$

C'est un vecteur $\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B}$ de norme :

$$\|\vec{C}\| = \|\vec{A} \wedge \vec{B}\| = \|\vec{A}\| \, \|\vec{B}\| \sin(\widehat{\vec{A}, \vec{B}})$$

La direction du produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est perpendiculaire au plan contenant $\vec{A}$ et $\vec{B}$ et son sens est tel que le trièdre $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ est direct.

Si $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$, les vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont colinéaires.

Notons que le produit vectoriel est distributif mais non commutatif :

$$\vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$
$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\vec{B} \wedge \vec{A}$$

En coordonnées cartésiennes,

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (A_y B_z - A_z B_y)\vec{u}_x + (A_z B_x - A_x B_z)\vec{u}_y + (A_x B_y - A_y B_x)\vec{u}_z$$

En coordonnées cylindriques,

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (A_\theta B_z - A_z B_\theta)\vec{u}_x + (A_z B_\theta - A_\theta B_z)\vec{u}_\theta + (A_\rho B_\theta - A_\theta B_\rho)\vec{u}_z$$

En coordonnées sphériques,

$$\vec{C} = \vec{A} \wedge \vec{B} = (A_\theta B_\varphi - A_\varphi B_\theta)\vec{u}_r + (A_\varphi B_r - A_r B_\varphi)\vec{u}_\theta + (A_r B_\theta - A_\theta B_r)\vec{u}_\varphi$$

A.4. Vecteur gradient

1 Définition du gradient

Soit une fonction scalaire $f(\vec{r})$ définie dans une région de l'espace, nantie des qualités d'une « bonne fonction » (continuité, dérivabilité,...) comme le sont généralement les grandeurs physiques comme par exemple la température T, l'indice de réfraction, la masse volumique...

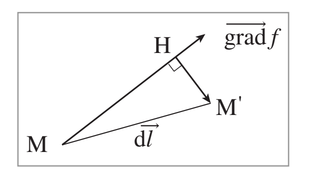


Fig. A.7.

On définit son gradient entre deux points voisins M et M′ (fig. A.7), tels que $\overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \mathrm{d}\,\vec{l}$, par le vecteur $\overrightarrow{\text{grad}}\,f$ qui vérifie la relation :

$$\mathrm{d}f = f(\mathrm{M'}) - f(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\text{grad}}\,f \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$$

Selon cette définition :

- le maximum du produit scalaire a lieu lorsque $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ et $\overrightarrow{\text{grad}}\,f$ sont colinéaires ; en d'autres termes, le vecteur gradient pointe dans la direction où la fonction varie le plus vite ;
- à l'inverse, si $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{\text{grad}}\,f$, le produit scalaire est nul. Ceci indique que la fonction f ne varie pas dans cette direction : $\overrightarrow{\text{grad}}\,f$ est normal aux surfaces satisfaisant à la relation $f(\vec{r}) = \mathrm{Cte}$;
- la longueur du vecteur gradient est d'autant plus grande que la variation de la fonction dans cette direction est plus forte ;
- remarquons enfin que, entre deux points A et B, la variation de la fonction f est indépendante du chemin (C) suivi pour aller de A à B :

$$f(B) - f(A) = \int_{\mathrm{A}}^{B} \overrightarrow{\text{grad}}\,f \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$$

Sur un contour fermé,

$$\oint \overrightarrow{\text{grad}}\,f \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = 0$$

2 Expression du gradient en coordonnées cartésiennes

Considérons deux points voisins $\mathrm{M}(x, y, z)$ et $\mathrm{M'}(x', y', z')$, avec $x' = x + \mathrm{d}x$, $y' = y + \mathrm{d}y$ et $z' = z + \mathrm{d}z$. On peut écrire le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{MM'}}$ sous la forme :

$$\overrightarrow{\mathrm{MM'}} = \mathrm{d}x\,\vec{u}_{\mathrm{x}} + \mathrm{d}y\,\vec{u}_{\mathrm{y}} + \mathrm{d}z\,\vec{u}_{\mathrm{z}}$$

D'après le développement de Taylor :

$$f(\mathrm{M'}) = f(\mathrm{M}) + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\mathrm{d}z\right)$$

et l'expression se réécrit :

$$f(\mathrm{M'}) = f(\mathrm{M}) + \overrightarrow{\text{grad}}\,f \cdot \overrightarrow{\mathrm{MM'}}$$

Par identification, nous en déduirons que l'expression du gradient est :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{u}_\text{x} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_\text{y} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{u}_\text{z}$$

■ **Exemple**

Soit la fonction température :

$$T(x, y, z) = x^2 + y^2 + \frac{1}{2}z^2 = \text{Cte}$$

C'est l'équation d'un ellipsoïde de révolution :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\; T = 2x\vec{u}_\text{x} + 2y\vec{u}_\text{y} + z\vec{u}_\text{z}$$

3 Expression du gradient en coordonnées cylindriques et sphériques

En coordonnées cylindriques, on a :

$$\overrightarrow{\text{MM}'} = \text{d}\rho\,\vec{u}_\rho + \rho\,\text{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \text{d}z\,\vec{u}_\text{z}$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial \rho}\vec{u}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{u}_\text{z}$$

En coordonnées sphériques, on a :

$$\overrightarrow{\text{MM}'} = \text{d}r\,\vec{u}_\text{r} + r\,\text{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\text{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{u}_\text{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{u}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{u}_\varphi$$

4 Expression du gradient en fonction de l'opérateur $\vec{\nabla}$

Pour représenter le gradient, on utilise souvent formellement l'opérateur $\vec{\nabla}$ (nabla) comme s'il s'agissait d'un vecteur :

$$\vec{\nabla} = \vec{u}_\text{x}\frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_\text{y}\frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_\text{z}\frac{\partial}{\partial z}$$

Cet opérateur ne prend de sens que lorsqu'on l'applique à une fonction. $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ s'écrit en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{\nabla} f = \vec{u}_\text{x}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{u}_\text{y}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{u}_\text{z}\frac{\partial f}{\partial z}$$

Cet opérateur se comporte comme un vecteur, dans des produits scalaires, vectoriels ; il permet des unifications d'écriture commodes, mais attention, les formules de l'algèbre vectorielle ne sont pas toujours applicables à ce « vecteur ».

A.5. Flux et divergence d'un champ de vecteurs

1 Flux d'une grandeur vectorielle à travers une surface

Prenons l'exemple d'un filet étendu perpendiculairement au courant d'une rivière caractérisée en tout point par sa vitesse locale $\vec{v}(x, y, z)$ (fig. A.8a). Le volume d'eau Q qui traverse une maille du filet est proportionnel à la vitesse du courant, à la surface de la maille et au temps écoulé : $Q = |\vec{v}|| S\Delta t$. C'est le volume du parallélépipède rectangle de base considérée S et de hauteur $\|\vec{v}\|\,\Delta t$.

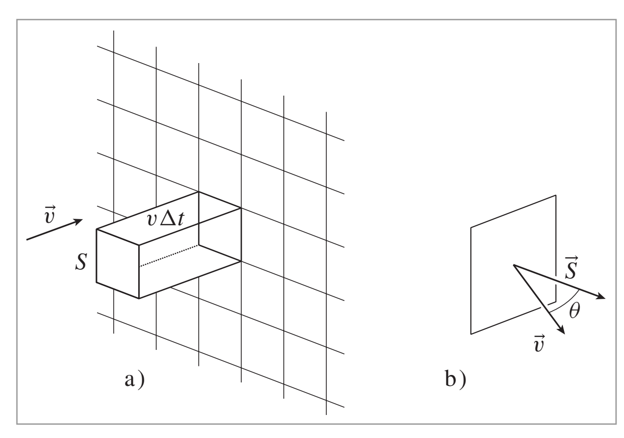


Fig. A.8.

Le flux volumique d'eau est le volume d'eau qui transite par unité de temps : $\Phi = vS$.

Si la surface de la maille n'est pas perpendiculaire au courant (fig. A.8.b), il passe moins d'eau, le flux est moindre et vaut :

$$\Phi = \|\vec{v}\|\, S\cos\theta = \vec{v}\cdot\vec{S}$$

Le sens du vecteur $\vec{S}$ est arbitraire, mais une fois choisi, il impose un signe déterminé au flux.

Si on considère l'ensemble du filet, de surface Σ, le flux à travers chaque maille supposée suffisamment petite, apparaît comme un flux volumique élémentaire $\mathrm{d}\Phi = \vec{v}\cdot\mathrm{d}\,\vec{S}$, défini en chaque point de la surface et le flux volumique total Φ s'exprime par l'intégrale de surface :

$$\Phi = \iint_{\Sigma} \vec{v}\cdot\mathrm{d}\,\vec{S}$$

La notion de flux s'étend à toute grandeur vectorielle définie dans une région de l'espace : champs électriques ou magnétiques,...

Par exemple, le flux d'un champ électrique à travers une surface Σ s'écrit :

$$\Phi(E) = \iint_{\Sigma} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\,\vec{S}$$

2 Définition de la divergence

Par définition, la divergence d'un vecteur $\vec{A}$ est la limite du flux de ce vecteur (ramené à l'unité de volume) à travers la surface fermée S, entourant un volume V, quand ce volume tend vers zéro :

$$\mathrm{div}\,\vec{A} = \lim_{V\to 0} \oiint \vec{A}\cdot\mathrm{d}\,\vec{S}$$

ou

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{div}\,\vec{A}\,\mathrm{d}\tau$$

La divergence donne la différence entre le flux entrant et le flux sortant. Elle peut avoir deux sources : la variation de longueur d'un vecteur quand on se déplace dans son sens et la façon dont les lignes de champ s'écartent (« divergent ») les unes des autres (fig. A.9).

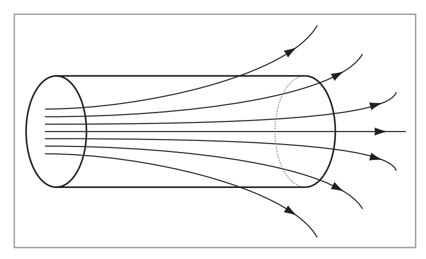


Fig. A.9.

Si on prend un volume élémentaire cylindrique dont la base est perpendiculaire en son centre au champ vectoriel étudié, on constate que, si seule la longueur du vecteur change, c'est uniquement le flux à travers les faces planes du cylindre qui contribue au flux total ; en revanche, si le module du vecteur est constant mais que son orientation change, seule la surface latérale contribue au flux total. Dans le cas général, ces deux contributions s'ajoutent.

3 Expression de la divergence en coordonnées cartésiennes

Considérons un cube de côtés dx, dy, dz, centré sur le point M(x, y, z) et dont les arêtes sont parallèles aux axes $\vec{u}_x$, $\vec{u}_y$, $\vec{u}_z$ (fig. A.10).

Désignons par $\vec{A}(x, y, z)$ un vecteur d'origine M, dont on veut calculer le flux à travers la surface totale du cube, la normale étant orientée sur chaque face vers l'extérieur.

Considérons les faces perpendiculaires à $\vec{u}_z$.

Seule la composante A_x contribue au flux :

$$\mathrm{d}\Phi_{\text{avant}} = \left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\Phi_{\text{arrière}} = -\left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\Phi_x = \mathrm{d}\Phi_{\text{avant}} + \mathrm{d}\Phi_{\text{arrière}} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

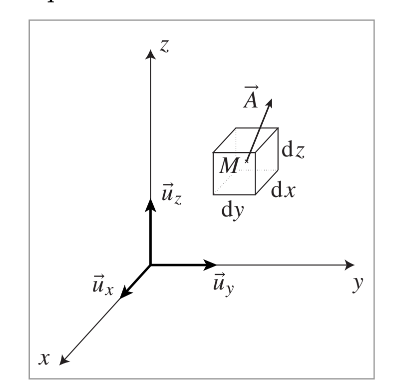


Fig. A.10.

En tenant compte des contributions des deux autres paires de faces, on trouve :

$$\mathrm{d}\Phi = \mathrm{d}\Phi_x + \mathrm{d}\Phi_y + \mathrm{d}\Phi_z = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}\tau$$

La fonction scalaire fabriquée à partir du vecteur $\vec{A}$ définit la divergence de $\vec{A}$ dont l'expression en coordonnées cartésiennes est donc :

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Pour représenter la divergence, on utilise souvent formellement l'opérateur :

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

En effet,

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \left(\vec{u}_x\frac{\partial}{\partial x} + \vec{u}_y\frac{\partial}{\partial y} + \vec{u}_z\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(A_x\vec{u}_x + A_y\vec{u}_y + A_z\vec{u}_z\right)$$

On démontre que la divergence est invariante par changement de repère.

4 Expression de la divergence en coordonnées cylindriques

Soit un vecteur $\vec{A}$ ayant comme origine le centre du volume élémentaire $MNPQM'N'P'Q'$. À travers les surfaces $\mathrm{d}S_1$ et $\mathrm{d}S_1'$ (fig. A.11), seules les composantes dirigées selon $\vec{u}_\rho$ ont un flux non nul.

On a donc :

$$\mathrm{d}\Phi_\rho = \left(A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\mathrm{d}S_1' - \left(A_\rho - \frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\mathrm{d}S_1$$

Comme $\mathrm{d}S_1 = (\rho - \mathrm{d}\rho/2)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}S_1' = (\rho + \mathrm{d}\rho/2)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$,

$$\mathrm{d}\Phi_\rho = A_\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z + 2\frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$$\mathrm{d}\Phi_\rho = \left(A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial\rho}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}\,\mathrm{d}\tau$$

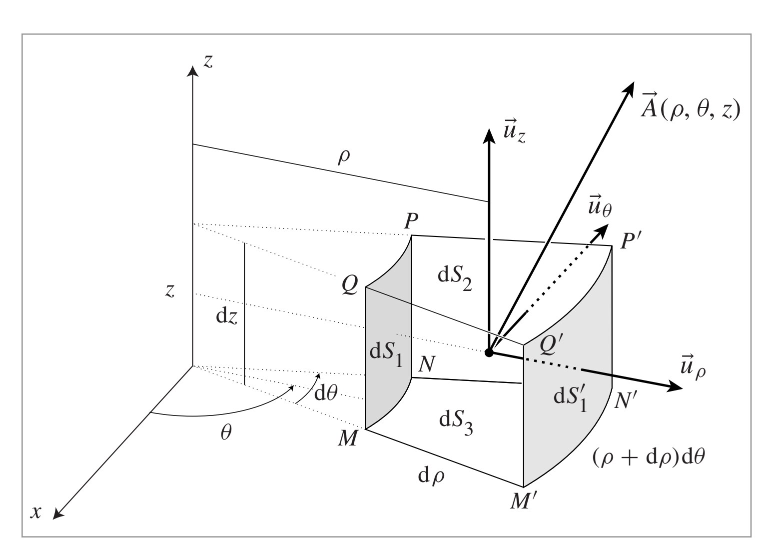


Fig. A.11.

À travers les surfaces élémentaires $\mathrm{d}S_2$ et $\mathrm{d}S_2'$, seules les composantes dirigées selon $\vec{u}_\theta$ ont un flux non nul. Comme $\mathrm{d}S_2 = \mathrm{d}S_2' = \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$, on obtient :

$$\mathrm{d}\Phi_\theta = 2\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\,\mathrm{d}\tau$$

À travers les surfaces élémentaires $\mathrm{d}S_3$ et $\mathrm{d}S'_3$, seules les composantes dirigées selon $\vec{u}_z$ ont un flux non nul. Comme $\mathrm{d}S_3 = \mathrm{d}S'_3 = \rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho$, on a :

$$\mathrm{d}\Phi_z = 2\frac{\partial A_z}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{2}\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho = \frac{\partial A_z}{\partial z}\,\mathrm{d}\tau$$

Au total :

$$\mathrm{d}\Phi = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}\tau$$

5 Expression de la divergence en coordonnées sphériques

Soit un vecteur $\vec{A}$ ayant comme origine le centre du volume élémentaire $\mathrm{M}NPQ\mathrm{M}'N'P'Q'$. À travers les surfaces $\mathrm{d}S_1$ et $\mathrm{d}S'_1$ (fig. A.12) seules les composantes dirigées selon $\vec{u}_r$ ont un flux non nul :

$$\mathrm{d}\Phi_r = \left(A_r + \frac{\partial A_r}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\mathrm{d}S'_1 - \left(A_r - \frac{\partial A_r}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\mathrm{d}S_1$$

Comme $\mathrm{d}S_1 = (r - dr/2)^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ et $\mathrm{d}S'_1 = (r + dr/2)^2\,\mathrm{d}\theta\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Phi_r = {} & A_r\left(\left(r + \frac{\mathrm{d}r}{2}\right)^2 - \left(r - \frac{\mathrm{d}r}{2}\right)^2\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi \\ & + \frac{\partial A_r}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{2}\left(\left(r + \frac{\mathrm{d}r}{2}\right)^2 + \left(r - \frac{\mathrm{d}r}{2}\right)^2\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

$\mathrm{d}\Phi_r \simeq 2A_r r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi + \dfrac{\partial A_r}{\partial r}r^2\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$ en négligeant les termes d'ordre supérieur.

On a donc :

$$\mathrm{d}\Phi_r = \left(2\frac{A_r}{r} + \frac{\partial A_r}{\partial r}\right)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi$$

À travers les surfaces $\mathrm{d}S_2$ et $\mathrm{d}S'_2$ seules les composantes dirigées selon $\vec{u}_\theta$ ont un flux non nul. On a donc :

$$\mathrm{d}\Phi_\theta = \left(A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}S'_2 - \left(A_\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}S_2$$

Comme $\mathrm{d}S_2' = r\sin(\theta + \mathrm{d}\theta/2)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$ et $\mathrm{d}S_2 = r\sin(\theta - \mathrm{d}\theta/2)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Phi_\theta &= A_\theta\left(\sin\left(\theta + \frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right) - \sin\left(\theta - \frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\right) r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\ &\quad + \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\left(\sin\left(\theta + \frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right) + \sin\left(\theta - \frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\right) r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\\ &= 2\left(A_\theta\cos\theta\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2} + \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\sin\theta\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right) r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\end{aligned}$$

Comme $\sin\dfrac{\mathrm{d}\theta}{2} \approx \dfrac{\mathrm{d}\theta}{2}$ et $\cos\dfrac{\theta}{2} \approx 1$, on a :

$$\mathrm{d}\Phi_\theta = \left(A_\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\,\mathrm{d}\theta\sin\theta\right) r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r$$

On a donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\Phi_\theta &= \left(A_\theta\frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{\partial A_\theta}{\partial\theta}\right) r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(r\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned}$$

À travers les surfaces $\mathrm{d}S_3$ et $\mathrm{d}S_3'$ seules les composantes dirigées selon $\vec{u}_\varphi$ ont un flux non nul ; comme $\mathrm{d}S_3 = \mathrm{d}S_3' = r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r$, on obtient :

$$\mathrm{d}\Phi_\varphi = 2\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\,\mathrm{d}\tau$$

Au total :

$$\mathrm{d}\Phi = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(r^2\sin\theta A_r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}\tau$$

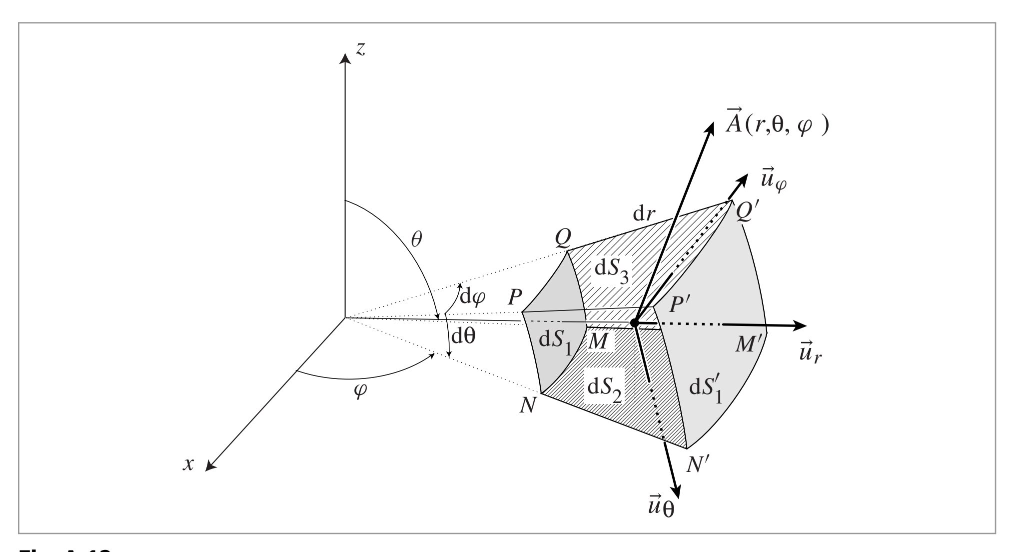


Fig. A.12.

A.6. Circulation et rotationnel d'un champ de vecteurs

1 Circulation d'un vecteur

Pour un déplacement élémentaire $\overrightarrow{\mathrm{dM}}$, le travail d'une force $\vec{F}$ s'exprime par :

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{dM}}$$

Pour un trajet fini AB, ce travail s'exprime par l'intégrale curviligne appelée « circulation » :

$$W_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \int_{\mathrm{A}}^{B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{\mathrm{M}}$$

Plus généralement, la circulation d'un vecteur $\vec{A}$ entre deux points A et B (fig. A.13) est :

$$C = \int_{\mathrm{A}}^{B} \vec{A} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$$

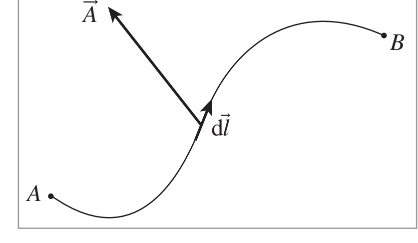


Fig. A.13.

Sur un circuit fermé, la circulation s'écrit :

$$\oint \vec{A} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$$

2 Définition du rotationnel

Le rotationnel du vecteur $\vec{A}$ est lui-même un vecteur. La composante du rotationnel du vecteur $\vec{A}$ suivant la normale $\vec{n}$ en un point d'une surface $\mathrm{d}\,S$ (fig. A.14) est la limite de la circulation du vecteur (ramenée à l'unité de surface) sur un contour C fermé délimitant une surface S, quand cette surface tend vers zéro :

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \lim_{S\to 0} \frac{1}{S} \oint \vec{A} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l}$$

ou

$$\mathrm{d}\,C = \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} \cdot \mathrm{d}\,S\vec{n}$$

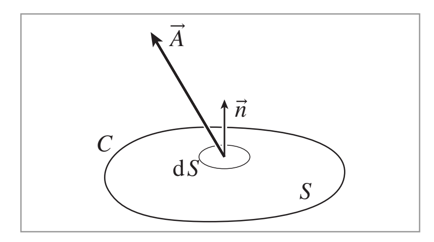


Fig. A.14.

Compte tenu de la relation entre circulation élémentaire et rotationnel, on voit qu'un rotationnel non nul signifie que le champ vectoriel possède une composante « tournante », analogue au vecteur vitesse d'un mobile sur un cercle. La direction du rotationnel est perpendiculaire au plan dans lequel cette composante tournante est la plus élevée (comme le vecteur moment angulaire du mobile précédent) et le vecteur rotationnel est d'autant plus grand que cette composante est plus forte.

3 Expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes

Calculons la circulation d'un vecteur sur un trajet fermé, infinitésimal. Soit un contour le long duquel la circulation n'est pas nulle. Il nous faut évaluer localement le rapport $\mathrm{d}C/\mathrm{d}S$ entre la circulation et la surface. Décomposons la surface limitée par le contour en un maillage de surfaces élémentaires ayant des contours communs (fig. A.15.a). Nous nous limiterons au cas des surfaces situées dans les plans définis par les axes du système de coordonnées. Considérons, par exemple un rectangle élémentaire dans le plan $x\mathrm{O}y$ (fig. A.15.b).

La circulation du vecteur $\vec{A}$ le long du trajet MNPQ comporte 4 termes correspondant aux 4 côtés :

- sur MN : $$A_x\left(x, y-\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x = \left(A_x - \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x$$
- sur NP : $$A_y\left(x+\frac{\mathrm{d}x}{2}, y\right)\mathrm{d}y = \left(A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y$$
- sur PQ : $$-A_x\left(x, y+\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x = -\left(A_x + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{2}\right)\mathrm{d}x$$
- sur QM : $$-A_y\left(x-\frac{\mathrm{d}x}{2}, y\right)\mathrm{d}y = -\left(A_y - \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{2}\right)\mathrm{d}y$$

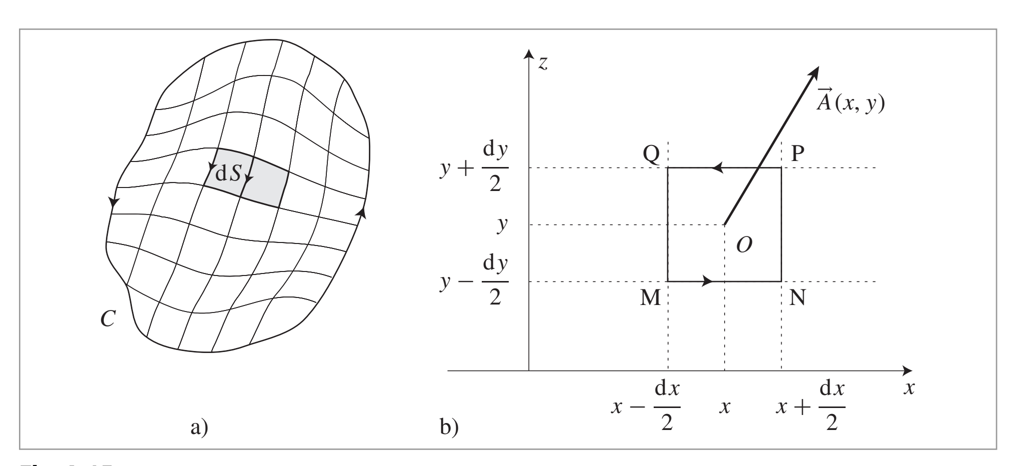


Fig. A.15.

En regroupant les différents termes, on obtient :

$$\mathrm{d}C = \int_{C_1} \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathrm{d}S$$

et

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}S} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Un calcul analogue dans les deux autres plans de coordonnées donne respectivement :

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) \qquad \text{sur } yOz$$

$$\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) \qquad \text{sur } zOx$$

Ces trois expressions sont les trois composantes du vecteur rotationnel de $\vec{A}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

que l'on peut écrire en fonction de l'opérateur $\vec{\nabla}$:

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{u}_x + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{u}_y + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{u}_z$$

On peut également écrire le rotationnel de $\vec{A}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Nous admettrons ici sans démonstration que la propriété qui vient d'être établie à propos du rapport entre la circulation du vecteur $\vec{A}$ sur le contour et l'aire de la surface reste vraie même lorsque les contours ne sont pas situés dans les plans de coordonnées (justification par le caractère invariant du rotationnel).

4 Expression du rotationnel en coordonnées cylindriques

Sur la figure A.16, on a signalé par des flèches différentes, le sens de parcours des trois surfaces ; il est tel que les normales aux surfaces soient orientées respectivement dans les directions du trièdre direct $\vec{u}_\rho$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_z$. Le long des contours M′N′P′Q′, la circulation est égale à :

$$\begin{aligned} \mathrm{d}C_1 &= A_\theta\left(\theta, z - \frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\rho\,\mathrm{d}\theta + A_z\left(z, \theta + \frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}z \\ &\quad - A_\theta\left(\theta, z + \frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\rho\,\mathrm{d}\theta - A_z\left(z, \theta - \frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}z \\ &= \left(A_\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\rho\,\mathrm{d}\theta + \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial \theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}z \\ &\quad - \left(A_\theta + \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\rho\,\mathrm{d}\theta - \left(A_z - \frac{\partial A_z}{\partial \theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}z \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial A_z}{\partial \theta}\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z - \frac{A_\theta}{\partial z}\rho\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\rho\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$$= \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\mathrm{d}S_1$$

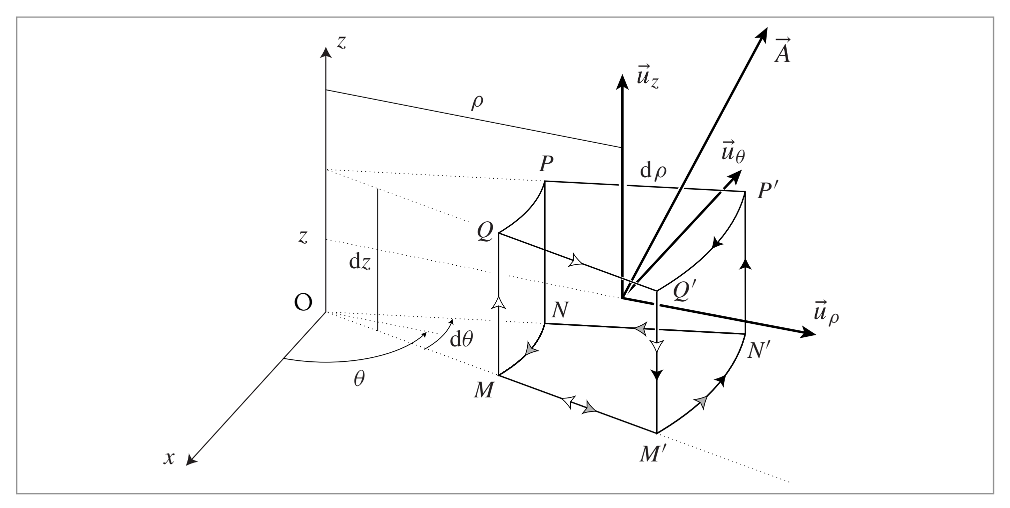


Fig. A.16.

Le long de MQQ′M′, la circulation est égale à :

$$\mathrm{d}C_2 = A_z\left(z, \rho - \frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\mathrm{d}z + A_\rho\left(\rho, z + \frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}\rho$$

$$- A_z\left(z, \rho + \frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\mathrm{d}z - A_\rho\left(\rho, z - \frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}\rho$$

$$= \left(A_z - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\mathrm{d}z + \left(A_\rho + \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}\rho$$

$$- \left(A_\rho - \frac{\partial A_\rho}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{2}\right)\mathrm{d}\rho - \left(A_z + \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\mathrm{d}z$$

$$= \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}z$$

$$= \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right)\mathrm{d}S_2$$

Le long de M′N′NM, la circulation est égale à

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}C_3 &= A_\theta\left(\theta,\rho+\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\left(\rho+\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\mathrm{d}\theta - A_\rho\left(\rho,\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}\rho\\
&\quad - A_\theta\left(\theta,\rho-\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\left(\rho-\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\mathrm{d}\theta + A_\rho\left(\rho,\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}\rho\\
&= \left(A_\theta+\frac{\partial A_\theta}{\partial\rho}\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\left(\rho+\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\mathrm{d}\theta - \left(A_\rho+\frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}\rho\\
&\quad - \left(A_\theta+\frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\left(\rho+\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\mathrm{d}\theta + \left(A_\rho+\frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\rho}{2}\right)\mathrm{d}\rho\\
&= \frac{\partial A_\theta}{\partial\rho}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta + A_\theta\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\
&= \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial\rho} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\mathrm{d}\theta} + \frac{A_\theta}{\rho}\right)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\
&= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}S_3
\end{aligned}$$

Au total on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z}\right)\vec{u}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\vec{u}_\theta + \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho A_\theta)}{\partial\rho} - \frac{\partial A_\rho}{\partial\theta}\right)\vec{u}_z$$

que l’on peut écrire :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \vec{u}_\rho & \rho\vec{u}_\theta & \vec{u}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\theta & A_z \end{vmatrix}$$

5 Expression du rotationnel en coordonnées sphériques

Sur la figure A.17, on a signalé par des flèches différentes, le sens de parcours des trois surfaces ; il est tel que les normales aux surfaces soient orientées respectivement dans les directions du trièdre direct $\vec{u}_r$, $\vec{u}_\theta$, $\vec{u}_\varphi$.

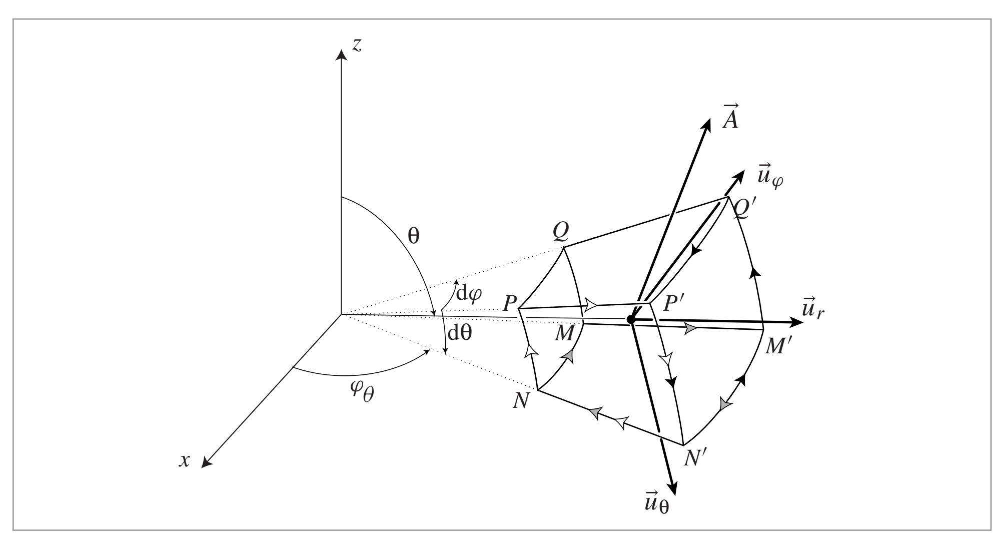


Fig. A.17.

Le long de M′Q′P′N′, la circulation est égale à :

$$A_\varphi\left(\varphi,\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)r\sin\left(\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}\varphi - A_\theta\left(\theta,\varphi+\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}\right)r\,\mathrm{d}\theta$$

$$-A_\varphi\left(\varphi,\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)r\sin\left(\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}\varphi + A_\theta\left(\theta,\varphi-\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}\right)r\,\mathrm{d}\theta$$

$$=\left(A_\varphi+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)r\sin\left(\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}\varphi-\left(A_\theta+\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}\right)r\,\mathrm{d}\theta$$

$$-\left(A_\varphi-\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)r\sin\left(\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}\varphi+\left(A_\theta-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}\right)\mathrm{d}\theta$$

$$=\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)+\sin\left(\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$-A_\varphi\left(\sin\left(\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)-\sin\left(\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\right)r\,\mathrm{d}\varphi-\frac{\partial A_\theta}{\mathrm{d}\varphi}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=2\left(\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\sin\theta\cos\frac{\mathrm{d}\theta}{2}r\,\mathrm{d}\theta+2A_\varphi\cos\theta\sin\frac{\mathrm{d}\theta}{2}r\,\mathrm{d}\varphi-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\partial A_\varphi}{\partial\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi+A_\varphi r\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi-\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\left(\frac{A_\varphi\cos\theta}{r\sin\theta}+\frac{\partial A_\varphi}{r\,\mathrm{d}\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\left(\frac{A_\varphi\cos\theta}{r\sin\theta}+\frac{\partial A_\varphi}{r\,\mathrm{d}\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}S_1$$

$$\mathrm{d}C_1=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(r\sin\theta A_\varphi}{\partial\theta}-\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial\varphi}\right)\mathrm{d}S_1$$

Le long de NN′M′M, la circulation est égale à :

$$
\begin{aligned}
& A_\mathrm{r}\left(r,\varphi+\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}\right)\mathrm{d}r - A_\varphi\left(r+\frac{\mathrm{d}r}{2},\varphi\right)\left(r+\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\mathrm{d}\varphi \\
& \quad - A_\mathrm{r}\left(r,\varphi-\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}\right)\mathrm{d}r + A_\varphi\left(r-\frac{\mathrm{d}r}{2},\varphi\right)\left(r-\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\mathrm{d}\varphi \\
& = \left(A_\mathrm{r}+\frac{\partial A_\mathrm{r}}{\partial\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}\right)\mathrm{d}r - \left(A_\varphi+\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\left(r+\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
& \quad - \left(A_\mathrm{r}-\frac{\partial A_\mathrm{r}}{\partial\varphi}\frac{\mathrm{d}\varphi}{2}\right)\mathrm{d}r + \left(A_\varphi-\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\left(r-\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi \\
& = \left(-\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\mathrm{r}}{\partial_\varphi}\right) r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta - A_\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\
\mathrm{d}C_2 & = \left(-\frac{\partial A_\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\mathrm{r}}{\partial\varphi}-\frac{A_\varphi}{r}\right) r\sin\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
& = \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\mathrm{r}}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\mathrm{d}S_2
\end{aligned}
$$

Le long de NN′P′P, la circulation est égale à

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}C_3 & = A_\mathrm{r}\left(r,\theta-\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}r - A_\theta\left(r-\frac{\mathrm{d}r}{2},\theta\right)\left(r-\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\mathrm{d}\theta \\
& \quad - A_\mathrm{r}\left(r,\theta+\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}r + A_\theta\left(r+\frac{\mathrm{d}r}{2},\theta\right)\left(r+\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\mathrm{d}\theta \\
& = \left(A_\mathrm{r}-\frac{\partial A_\mathrm{r}}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}r - \left(A_\theta-\frac{\partial A_\theta}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\left(r-\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\mathrm{d}\theta \\
& \quad - \left(A_\mathrm{r}+\frac{\partial A_\mathrm{r}}{\partial\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{2}\right)\mathrm{d}r + \left(A_\theta+\frac{\partial A_\theta}{\partial r}\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\left(r+\frac{\mathrm{d}r}{2}\right)\mathrm{d}\theta \\
& = \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_\mathrm{r}}{\partial\theta}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta + A_\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
\mathrm{d}C_3 & = \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_\mathrm{r}}{\partial\theta}+\frac{A_\theta}{r}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_\mathrm{r}}{\partial\theta}\right)\mathrm{d}S_3
\end{aligned}
$$

Au total on a :

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A} = & \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin\theta A_\varphi)-\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial\varphi}\right)\vec{u}_\mathrm{r} \\
& + \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\mathrm{r}}{\partial\varphi}-\frac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right)\vec{u}_\theta \\
& + \left(\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial A_\mathrm{r}}{\partial\theta}\right)\vec{u}_\varphi
\end{aligned}
$$

On peut écrire :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A} = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\begin{vmatrix} \vec{u}_{\text{r}} & r\,\vec{u}_{\theta} & r\sin\theta\,\vec{u}_{\varphi} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \theta} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} \\ A_{\text{r}} & rA_{\theta} & r\sin\theta A_{\varphi} \end{vmatrix}$$

A.7. Le laplacien

Le laplacien d'une fonction scalaire f est la divergence du gradient de cette fonction. C'est un scalaire ; on le note $\nabla^2 f$ ou Δf :

$$\text{div}(\overrightarrow{\text{grad}}\,f) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f$$

En coordonnées cartésiennes :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En coordonnées cylindriques :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

En coordonnées sphériques :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Compte tenu des significations du gradient et de la divergence, le laplacien d'un champ scalaire calculé en un point mesure une « dérivée seconde » de la variation de ce champ autour du point considéré :

- la nullité du laplacien exprime la « régularité » de la fonction et sa variation autour de ce point ;
- sa non nullité exprime un changement de l'intensité de la variation de la fonction autour de ce point.

A.8. Théorème de Green-Ostrogradsky

Selon le théorème de Green-Ostrogradsky, le flux total de tout vecteur $\vec{A}$ à travers une surface S entourant le volume V est tel que :

$$\iint_{\text{S}} \vec{A} \cdot \text{d}\,\vec{S} = \iiint_{\text{V}} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A})\,\text{d}\tau$$

Pour démontrer ce théorème, considérons une surface fermée S à travers laquelle nous voulons calculer le flux d'un champ $\vec{A}$. Créons une paroi fictive P qui sépare le volume contenu dans S en deux (fig. A.18) ; nous obtenons ainsi deux surfaces fermées distinctes S_1 et S_2, la paroi P leur étant commune.

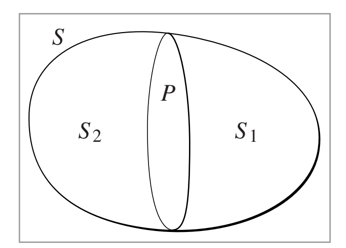


Fig. A.18.

Nous constatons immédiatement que le flux à travers S est exactement égal à la somme des flux à travers S_1 et S_2. En effet, soient les surfaces S_a et S_b telles que $S_a = S_1 + P$ et $S_b = S_2 + P$,

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_a} \vec{A} \cdot d\vec{S} + \iint_{S_b} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$= \iint_{S_1} \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_P \vec{A} \cdot d\vec{S}_{P_1} + \iint_P \vec{A} \cdot d\vec{S}_{P_2} + \iint_{S_2} \vec{A} \cdot d\vec{S}_2$$

Sur la paroi $d\vec{S}_{P_1} = -\,d\vec{S}_{P_2}$, donc

$$\iint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \iint_{S_1} \vec{A} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \vec{A} \cdot d\vec{S}_2$$

En généralisant cette procédure de segmentation, le volume V peut être découpé en une infinité d'éléments infinitésimaux, chacun de ces volumes étant caractérisé par une enveloppe extérieure de surface infinitésimale s.

En raisonnant comme dans le cas précédent, on peut facilement admettre que le flux à travers la surface fermée S est égal à la somme des flux à travers chacune de ces surfaces infinitésimales ainsi définies. Le flux à travers la surface fermée S ne dépend pas de la façon dont on découpe le volume V. Comme le flux est également indépendant du système de coordonnées retenu, nous utiliserons ici les coordonnées cartésiennes et ainsi chaque élément infinitésimal sera un parallélépipède de volume $dx\,dy\,dz$ dont l'un des sommets est situé au point (x, y, z) (fig. A.19).

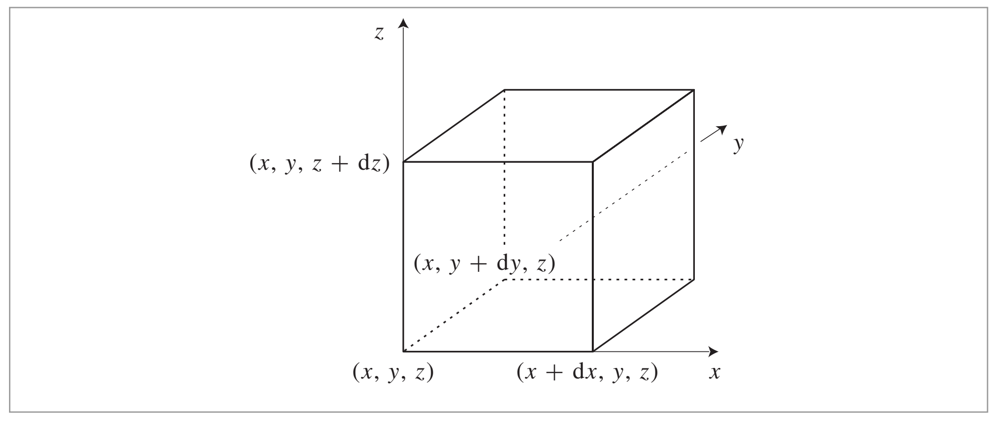


Fig. A.19.

Nous avons déjà calculé le flux à travers une surface infinitésimale en faisant la somme des flux à travers les six faces du parallélépipède après les avoir groupées deux par deux. Nous avons trouvé que le flux total à travers la surface s entourant un élément infinitésimal de volume $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ est égal à :

$$\mathrm{d}\Phi = \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$$

Nous avons également vu que le terme entre parenthèses est égal au produit scalaire $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}$ définissant la divergence de $\vec{A}$.

En superposant l'ensemble de ces contributions, nous pouvons calculer le flux total à travers la surface S entourant le volume V :

$$\iint_S \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\,\mathrm{d}\tau \tag{A.1}$$

■ **Exemple**

L'application du théorème de Green au vecteur :

$$\vec{\nabla}T = 2x\vec{u}_x + 2y\vec{u}_y + z\vec{u}_z$$

où T est encore la fonction : $T(x, y, z) = x^2 + y2 + \frac{1}{2}z^2$ donne :

$$\oiint_S \vec{\nabla}T\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_{V\text{ entouré par }S} \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}f)\,\mathrm{d}V = \iiint_S 5\,\mathrm{d}V = 5V$$

A.9. Théorème de Stockes

Selon le Théorème de Stockes, la circulation totale de tout vecteur $\vec{A}$ sur le contour C entourant la surface S est telle que :

$$\int_C \vec{A}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla}\wedge\vec{A})\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Pour démontrer ce théorème, considérons un contour C, que nous supposerons dans un plan, sur lequel nous voulons calculer la circulation d'un champ $\vec{A}$ (fig. A.20.a). Établissons un « itinéraire de dérivation » entre les points A et B appartenant à C pour créer deux boucles nouvelles, C_1 et C_2. Nous constatons immédiatement que la circulation de $\vec{A}$ sur C est égale à la somme des circulations sur les contours C_1 et C_2. En effet, l'« itinéraire de dérivation » étant parcouru en sens opposé sur C_1 et C_2, la somme des contributions associées à ce trajet est nulle. Étendons cette procédure et découpons maintenant la surface fermée S bordée par C en éléments infinitésimaux de surface $\mathrm{d}S$, chacune de ces surfaces étant à son tour délimitée par un contour infinitésimal c (fig. A.20.b).

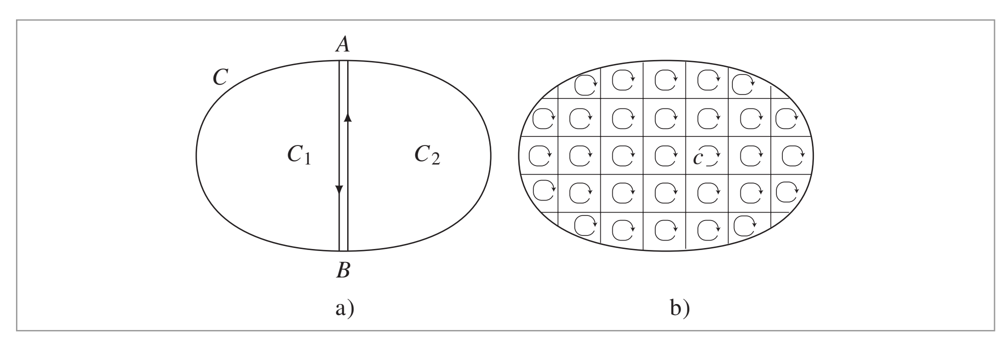


Fig. A.20.

Calculons la circulation de $\vec{A}$ sur chacun de ces contours c et sommons l'ensemble des contributions. En généralisant le raisonnement effectué pour une division en deux boucles, il est facile de se convaincre que la plupart des contributions se compensent deux à deux. La circulation sur C est donc égale à la somme de ces circulations infinitésimales.

La circulation sur C étant indépendante de la façon dont on effectue le découpage et du système de coordonnées retenu, nous utilisons ici par commodité les coordonnées cartésiennes (x, y, z) dans le repère orthonormé $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$.

Nous avons déjà calculé la circulation du champ $\vec{A}$ sur un rectangle infinitésimal et nous avons trouvé que la circulation associée au contour c entourant un élément infinitésimal de surface peut s'écrire :

$$\oint_c \vec{A} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) \mathrm{d}S$$

Le terme entre parenthèses correspond à la composante suivant l'axe z d'un vecteur $\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r})$ défini comme le rotationnel de $\vec{A}$. Aussi pouvons-nous exprimer la circulation associée au contour infinitésimal c sous la forme :

$$\oint_c \vec{A} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \left[(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r})\right]_z \mathrm{d}S = \left[\vec{\nabla} \wedge A(\vec{r})\right]_z \vec{u}_z \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} = \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r})\right) \cdot \mathrm{d}\,\vec{S}$$

$\mathrm{d}\,\vec{S}$ représentant le vecteur normal à la surface, de module $\mathrm{d}S$ et orienté suivant Oz. En sommant l'ensemble de ces contributions, nous obtenons la circulation totale sur le contour C :

$$\oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \iint_S \left(\vec{\nabla} \wedge \vec{A}(\vec{r})\right) \cdot \mathrm{d}\,\vec{S}$$

Ce calcul a été effectué pour une surface S plane et nous admettrons sans le démontrer qu'il peut être étendu à une surface non plane. Nous obtenons alors l'expression générale du théorème de Stockes :

$$\oint_C \vec{A} \cdot \mathrm{d}\,\vec{l} = \iint_S (\vec{\nabla} \wedge \vec{A}) \cdot \mathrm{d}\,\vec{S} \qquad \text{(A.2)}$$

Dans cette expression, le vecteur $\mathrm{d}\,\vec{S}$ représente un vecteur normal à la surface infinitésimale, de module $\mathrm{d}S$ et orienté de manière à ce que le trièdre $(\mathrm{d}\,\vec{l}, \vec{v}, \mathrm{d}\,\vec{S})$ soit direct, $\vec{v}$ étant un vecteur quelconque orienté vers le centre de la boucle.

A.10. Quelques relations à connaître en algèbre vectorielle

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}(f\vec{A}) &= \vec{\nabla}\cdot(f\vec{A}) = f\,\mathrm{div}\,\vec{A} + \vec{A}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,f \\
&= f\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\vec{\nabla}f \\
\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi) &= \vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\Phi = \nabla^2\Phi = \Delta\Phi \qquad \text{laplacien de } \Phi \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) &= \vec{\nabla}\wedge(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}) - \nabla^2\vec{A} \\
&= \overrightarrow{\mathrm{grad}}(\mathrm{div}\,\vec{A}) \qquad \text{laplacien vectoriel de } \vec{A} \\
\mathrm{div}(\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{A}) &= \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) = 0 \qquad \text{quel que soit } \vec{A} \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\Phi) &= \vec{\nabla}\wedge\vec{\nabla}\Phi = \vec{0} \qquad \text{quel que soit } \Phi \text{ différentiable} \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}(\vec{A}\wedge\vec{B}) &= \vec{\nabla}\wedge(\vec{A}\wedge\vec{B}) = (\vec{B}\cdot\vec{\nabla})\vec{A} - (\vec{A}\cdot\vec{\nabla})\vec{B} + (\vec{\nabla}\cdot\vec{B})\vec{A} - (\vec{\nabla}\cdot\vec{A})\vec{B} \\
\overrightarrow{\mathrm{rot}}(f\vec{A}) &= \vec{\nabla}\wedge(f\vec{A}) = (\vec{\nabla}f)\wedge\vec{A} + f(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) \\
\vec{\nabla}\cdot(\vec{A}\wedge\vec{B}) &= \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\wedge\vec{A}) - \vec{A}(\vec{\nabla}\wedge\vec{B})
\end{aligned}$$

A.11. Quelques formules utiles

1 Quelques relations entre les fonctions trigonométriques

$$\begin{aligned}
\sin(\alpha\pm\beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta \\
\cos(\alpha\pm\beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta \\
\sin\alpha \pm \sin\beta &= 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2} \\
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \\
\sin 2\alpha &= 2\sin\alpha\cos\alpha \\
\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\
\tan 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} \\
2\sin^2\frac{\alpha}{2} &= 1-\cos\alpha \\
2\cos^2\frac{\alpha}{2} &= 1+\cos\alpha
\end{aligned}$$

■ **Fonctions hyperboliques**

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

■ **Nombres complexes**

$$i^2 = -1$$
$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

2 Développements en série

Développement binomial

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots$$

Si $x \ll 1$,

$$(1+x)^n \sim 1 + nx$$

Développement en série utiles et leurs approximations pour $x \ll 1$:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \text{si } x \ll 1,\quad e^x \approx 1 + x.$$
$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots \qquad \text{si } x \ll 1,\quad \ln(1+x) \approx x.$$
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots \qquad \text{si } x \ll 1,\quad \sin x \approx x.$$
$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad \text{si } x \ll 1,\quad \cos x \approx 1.$$
$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \cdots \qquad \text{si } x \ll 1,\quad \tan x \approx x$$

Développement en série de Taylor de la fonction $f(x)$ autour de $f(x_0)$

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)_{\mathrm{x-x_0}} + \frac{1}{2!}(x - x_0)^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}\right)_{\mathrm{x-x_0}} + \cdots$$
$$\cdots + \frac{1}{n!}(x - x_0)^n\left(\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}\right)_{\mathrm{x-x_0}}$$

Valeur moyenne d'une fonction $y = f(x)$ dans l'intervalle (a, b)

$$\bar{y} = \frac{1}{b - a}\int_{\mathrm{a}}^{b} y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{b - a}\int_{\mathrm{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$$

A.12. Définition de l'angle solide

Par analogie avec l'angle plan, défini comme la surface plane comprise entre deux demi-droites concourantes, l'angle solide est la portion d'espace contenue à l'intérieur d'une surface conique fermée. Il se mesure par l'aire découpée par ce cône sur la surface d'une sphère de rayon unité centrée sur le sommet du cône. L'unité d'angle solide est le stéradian et l'angle solide correspondant à tout l'espace vaut 4π stéradians.

Réponses aux exercices

Chapitre 2

3 **a.** $\tan\theta \sin^2\theta = q^2/16\pi\varepsilon_0 mgl^2$.
b. $q = 1{,}36.10^{-9}$ C.

4 **a.** $E = q/4\pi\varepsilon_0 d^2 = 1{,}3.10^{13}$ V/m.
b. $F = -eE$.

5 **a.** En M, M′ et O, le champ est suivant Ox, dans le sens des x négatifs.
b. En N et N′, le champ est dirigé selon Ox, dans le sens des x positifs.
d. Non.

6 $V_A - V_B = \lambda(\ln b - \ln a)/2\pi\varepsilon_0$.

7 $\sigma = 2\pi\varepsilon_0 mg/q$ ne dépend pas de la position de la sphère.

Chapitre 3

1 **a.** $\Phi = 4\pi R^2 E = q/\varepsilon_0$.

4 **a.** $\sigma_1 = -\sigma_2$, $E_x = \sigma/\varepsilon_0$ entre les deux plans et il est nul partout ailleurs.
$\sigma_1 = \sigma_2$, le champ est nul entre les plans ; pour $x > d/2$, $E_x = \sigma/\varepsilon_0$ et pour $x < -d/2$, $E_x = -\sigma/\varepsilon_0$.

5 **a.** Appliquer le principe de superposition.
b. $E = (\sigma_1^2+\sigma_2^2)^{1/2}/2\varepsilon_0 = 1{,}4.10^6$ V/m.

6 Le champ est perpendiculaire à la couche chargée et indépendant de x en dehors de la couche.

9 **a.** $r < a$, $E_r = \rho r/2\varepsilon_0$ et
$r > a$, $E_r = \rho a^2/2\varepsilon_0 r$.

10 **a.** $E_r(r) = (1 + r/a)e^{-r/a}/4\pi\varepsilon_0 r^2$.

Chapitre 5

1 **a.** $V(P) = qa^2(3\cos^2\theta - 1)/4\pi\varepsilon_0 r^3$.
b. $E_r = -\partial V/\partial r$ et
$E_\theta = -(1/r)(\partial V/\partial\theta)$.

2 **a.** Pour $r \gg a$,
$V(M) = 3qa^2(2\cos^2\theta - 1)/4\pi\varepsilon_0 r^3$.

Chapitre 6

1 **b.** $Q_2 = -Q_3 = -4\pi\sigma R_1^3$.
c. $Q_3 = 0$.

2 **b.** $Q = 4\pi\varepsilon_0 RV$.
c. $q' = -rQ/d$.
d. $V_S = (1 - rR/d^2)V$.
e. $q = 6{,}5.10^{-3}$ rad.

4 $C = 2\pi\varepsilon_0/\ln(R'/R)$.

Chapitre 8

1 $d = qq'/4\pi\varepsilon_0 E_c$.

2 $U_e = Q^2/8\pi\varepsilon_0 R$.

3 $U_e = 3Q^2/40\pi\varepsilon_0 R = 810$ MeV.

Chapitre 9

1 $[\varepsilon_0\mu_0] = \mathrm{T}^2\mathrm{L}^{-2}$.

2 **b.** $\mathrm{B} = \mu_0 I/2\pi a$.

3 $B_n = \mu_0 nI \tan(\pi/\mathrm{n})/2\pi R$.

4 $B = \mu_0 I\, l^2/2\pi[(x^2+l^2/4)(x^2+l^2/2)^{1/2}]$.

6 Le champ est orthoradial.
$B_{int} = \mu_0 rI/2\pi R^2$ et $B_{ext} = \mu_0 I/2\pi r$.

Chapitre 11

4 **a.** $|\mathrm{M}| = L$.

5 **a.** $L_i = \mu_0 HN_i^2 \ln(b/a)/2\pi$. $|\mathrm{M}| = \mu_0 HN_1N_2 \ln(b/a)/2\pi$.

b. $K = 1$.